

## §1 集合と論理 演習問題 #1

📎 問題の難易度の目安【易】☆☆☆ 【基礎】★★☆ 【標準】★★★

### 1 (☆☆☆) (何者だ (有名問題))

タヌキは正直者で、キツネは嘘つき者である。A, Bはタヌキかキツネであることは分かっているが、どちらかはっきりしない。Aがこう言った：

『私がタヌキなら、Bもタヌキです』

A, Bの正体について、正しいのは次のうちどれか。

- ① A, Bともにタヌキ.
- ② Aはタヌキ, Bはキツネ.
- ③ Aはキツネ, Bはタヌキ.
- ④ A, Bともにキツネ.

### 2 (☆☆☆) (存在命題の証明)

『ある実数  $x$  に対して  $x^2 - x < 0$  が成り立つことを証明せよ』という問題に対して Xさんが次のように解答したが、Xさんの解答は誤りである。どこが間違っているか指摘し、正しく訂正せよ。

【Xさんの解答】  $x^2 - x = x(x - 1)$  であるから、 $0 < x < 1$  を満たす実数  $x$  に対して  $x^2 - x < 0$  である。したがって、ある実数  $x$  に対して  $x^2 - x < 0$  が成り立つ。

### 3 (★★☆) (背理法の妙①)

$a$  を実数とする。このとき任意の  $\gamma > 0$  に対して  $|a| \leq \gamma$  ならば、 $a = 0$  であることを背理法によって示せ。

### 4 (★★★) (背理法の妙②)

$x$  を  $x^3 = 3$  を満たす実数とする。

- (1)  $x$  は無理数であることを背理法を用いて示せ.
- (2)  $\alpha, \beta$  は有理数とする。すべての  $\alpha, \beta$  に対して  $x^2 + \alpha x + \beta \neq 0$  が成り立つことを示せ.