

§1 集合と論理 演習問題 #2

問題の難易度の目安【易】☆☆☆ 【基礎】☆☆☆ 【標準】☆☆☆

1 (☆☆☆) (背理法を用いた不等式の証明①)

4つの正数  $a, b, c, d$  について,  $a = b = c = d$  でないならば, 4つの実数  $a(1-b), b(1-c), c(1-d), d(1-a)$  のうち, 少なくとも1つは  $\frac{1}{4}$  より小さいことを証明せよ.

2 (☆☆☆) (背理法を用いた不等式の証明②)

$a, b$  を実数とする.  $f(x) = x^2 + ax + b$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ) に対し,  $-1 \leq x \leq 1$  における  $|f(x)|$  の最大値を  $M_{a,b}$  とする. このとき  $M_{a,b} \geq \frac{1}{2}$  であることを示せ.

3 (☆☆☆) (背理法の妙③)

空集合は任意の集合の部分集合であることを示せ.

4 (☆☆☆) (背理法の妙④)

関数  $f(x)$  は区間  $[a, b]$  上連続であり,  $\int_a^b f(x) dx = \frac{(b-a)^2}{2}$  をみたしているとする. このとき  $f(x_0) = x_0$  となる  $x_0 \in [a, b]$  が存在することを示せ.