熊本大学 数理科学総合教育センター　高校生向け証明問題トレーニング

§1 集合と論理　演習問題 #3　解答

✐ 問題の難易度の目安【易】★☆☆　【基礎】★★☆　【標準】★★★

問題を解くにあたり，次の**鳩の巣原理** (Pigeonhole Principle) について述べておく．

! 鳩の巣原理　n, m を自然数，$n > m$ とする．n 個のものを m 組に分けるとき，少なくとも 1 つの組は 2 個以上のものを含む．

$\boxed{1}$ (★☆☆) (鳩の巣原理を用いた証明①)

$3\,\mathrm{cm} \times 3\,\mathrm{cm}$ の正方形内に，10 個の点を打つ．それら点の中で距離が $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ 未満となる 2 点が存在することを証明せよ．

解答 $\Box_r := r\,\mathrm{cm} \times r\,\mathrm{cm}$ の正方形とおく．与えられた $\Box_3$ を 9 つの $\Box_1 = 1\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$ の正方形に分割する．鳩の巣原理より 10 個の点のうち同じ小正方形に属する 2 個の点が存在する．ところで，同じ小正方形 $\Box_1$ に属する 2 点間の距離の最大値は $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$ 未満だから，主張は示された．■

$\boxed{2}$ (★☆☆) (鳩の巣原理を用いた証明②)

a, b, c, d, e を相異なる 5 つの整数とする．このとき，この中から 2 つの整数を選んで，その差を 4 の倍数とすることができることを示せ．

解答 整数を 4 で割った余りは $0, 1, 2, 3$ であるから，鳩の巣原理より 5 つの整数 a, b, c, d, e の中には 4 で割った余りが等しいものが存在する．4 で割った余りが等しいとき，その差は 4 の倍数である．■

$\boxed{3}$ (★★☆) (鳩の巣原理を用いた証明③)

xyz 空間で，その座標がすべて整数であるような点を格子点という．座標空間に 9 個の格子点が与えられたとき，そのうちの 2 点の中点がまた格子点であるものが少なくとも 1 組存在することを示せ．

解答 (x_L, y_L, z_L) を格子点とすると，x_L, y_L, z_L それぞれ偶数，奇数を取りうるので，全部で $2^3 = 8$ 種類の格子点となる．鳩の巣原理より，9 個の格子点のうち 8 種類の中の同じ種類に属する点が少なくとも 2 つ存在する．これを A, B とすると A, B の座標成分の偶奇は一致しているので，中点もまた格子点である．ゆえに，主張は成り立つ．■

$\boxed{4}$ (★★★★) (Dirichlet の定理)

ω を与えられた無理数とする．

(1) 任意の自然数 n に対して

$$0 < y \leqq n, \quad |x - \omega y| < \frac{1}{n}$$

となる整数 (x, y) が少なくとも 1 組存在することを示せ．

(2) (1) を用いて，$|x - \omega y| < \dfrac{1}{y}$ となる整数 x, y が無数に存在することを示せ．

解答 (1)　実数 $a < b$ に対し，$[a, b) := \{x : a \leqq x < b\}$ と表す．区間 $[0, 1)$ を n 等分する：

$$\left[0, \frac{1}{n}\right), \quad \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad \ldots, \quad \left[\frac{n-1}{n}, 1\right).$$

各 $y = 0, 1, \ldots, n$ に対し，x を ωy を超えない最大の整数とするとき，定め方から $0 \leqq \omega y - x < 1$ であり，$\omega y - x$ は (y の値に応じて) $n+1$ 個の値を取りうるから，鳩の巣原理により上の n 個の区間のうち少なくとも 1 つの区間には，2 つ以上の $\omega y - x$ が属する．同じ区間に属するその 2 つの $\omega y - x$ を $\omega y_1 - x_1$, $\omega y_2 - x_2$ $(x_1 \neq x_2)$ とすると，

$$\Big|\omega y_1 - x_1 - (\omega y_2 - x_2)\Big| < \frac{1}{n} \quad \cdots ①$$

が成立する．$y_1 > y_2$ とし (このように設定しても一般性を失わない)，$y := y_1 - y_2$, $x := x_1 - x_2$ とおくと①より

$$0 < y \leqq n, \quad \Big|\omega y - x\Big| < \frac{1}{n}$$

が成り立つ．

(2)　$0 < y \leqq n$,　$\Big|\omega y - x\Big| < \frac{1}{n}$ を満たす (x, y) の中に，n を変化させるとき相異なるものが無数に存在することを，(1) および背理法を用いて証明する．もし有限個しかなかったとする．これら有限個のうちで $\Big|\omega y - x\Big|$ を最小にするものを $(x_0,\ y_0)$ とする．次に，

$$n > \frac{1}{|\omega y_0 - x_0|} \iff \frac{1}{n} < |\omega y_0 - x_0| \quad \cdots ②$$

となる n をとる．この n に対して (1) より $|\omega y_* - x_*| < \frac{1}{n}$ となる (x_*, y_*) を選ぶことができる．このとき②より

$$|\omega y_* - x_*| < \frac{1}{n} < |\omega y_0 - x_0|$$

を得るが，これは (x_0, y_0) が $|\omega y - x|$ を最小にさせることに矛盾する．ゆえに，相異なるものは無数にある．さらに $\frac{1}{n} < \frac{1}{y}$ であるから，$|\omega y - x| < \frac{1}{y}$ となる (x, y) は無数にある．∎