積分の応用: 面積, 体積, 長さ　問題 1　解答

$\boxed{1}$ 以下の問題における面積 S を求めよ.

(1) $a > 0$ とする. 次の極方程式はカージオイド (cardioid) 曲線と呼ばれる.

$$r = a(1 + \cos\theta), \quad (0 \le \theta \le 2\pi)$$

この曲線で囲まれる図形の面積 S を求めよ.

[解]: 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1+\cos\theta)^2\,d\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta)\,d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}\left(1 + 2\cos\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta \\ &= \frac{a^2}{2}\left[\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)\right]_0^{2\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2. \end{aligned}$$

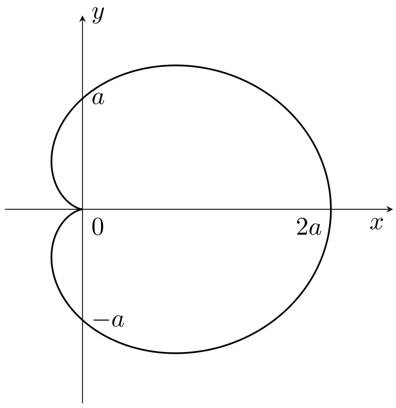

図 1　カージオイド

(2) n を自然数とする. 次の極方程式

$$r = \sin(n\theta) \quad \left(0 \le \theta \le \frac{\pi}{n}\right)$$

による曲線で囲まれる図形の面積 S を求めよ.

[解]: 求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \sin^2(n\theta)d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{1-\cos(2n\theta)}{2}d\theta = \frac{1}{4}\left[\theta - \frac{1}{2n}\sin(2n\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{n}} \\ &= \frac{\pi}{4n}. \end{aligned}$$

したがって, $S = \dfrac{\pi}{4n}$.

$\boxed{2}$ $a>0$ とする．以下の問題における曲線の長さ l を求めよ．

(1) 次の曲線

$$y = a\cosh\frac{x}{a}$$

を考える．$b>0$ に対し，この曲線の区間 $[-b, b]$ における長さ l を求めよ．
[解]: $y' = \sinh\frac{x}{a}$ より，

$$1+(y')^2 = 1+\sinh^2\frac{x}{a} = \cosh^2\frac{x}{a}$$

したがって求める長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \int_{-b}^{b}\sqrt{1+(y')^2}\,dx = \int_{-b}^{b}\cosh\frac{x}{a}\,dx = \Big[a\sinh\frac{x}{a}\Big]_{-b}^{b} \\ &= 2a\sinh\frac{b}{a} \quad \left(= a\left(e^{\frac{b}{a}} - e^{-\frac{b}{a}}\right)\right). \end{aligned}$$

(2) 次の極方程式はアルキメデスの螺旋と呼ばれる．

$$r = a\theta.$$

このとき θ が区間 $[0, 2\pi]$ を動くときの曲線の長さ l を求めよ．
[解]: $r^2+(r')^2 = a^2\theta^2+a^2 = a^2(\theta^2+1)$ となるから，求める長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta \\ &= a\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1}\,d\theta \\ &= a\left[\frac{1}{2}(\theta\sqrt{\theta^2+1}+\sinh^{-1}\theta)\right]_0^{2\pi} \\ &= a\left(\frac{1}{2}\sinh^{-1}2\pi + \pi\sqrt{1+4\pi^2}\right) \\ &= \frac{a}{2}\left(2\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \log\Big(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\Big)\right). \end{aligned}$$

(3) 次の極方程式は等角螺旋と呼ばれる．

$$r = e^{-a\theta}.$$

広義積分を使い，θ が区間 $[0, \infty)$ を動くときの曲線の長さ l を求めよ．
[解]: $r^2+(r')^2 = e^{-2a\theta}+a^2e^{-2a\theta} = (a^2+1)e^{-2a\theta}$ となるから，求める長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{\infty}\sqrt{r^2+\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\,d\theta = \sqrt{a^2+1}\int_0^{\infty}e^{-a\theta}\,d\theta \\ &= \sqrt{a^2+1}\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{a}e^{-a\theta}\right]_0^{R} \\ &= \frac{\sqrt{a^2+1}}{a}. \end{aligned}$$