

## 積分の応用: 面積, 体積, 長さ 問題 1

1 以下の問題における面積  $S$  を求めよ.

(1)  $a > 0$  とする. 次の極方程式はカージオイド (cardioid) 曲線と呼ばれる.

$$r = a(1 + \cos \theta), \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

この曲線で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ.

(2)  $n$  を自然数とする. 次の極方程式

$$r = \sin(n\theta) \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{n}\right)$$

による曲線で囲まれる図形の面積  $S$  を求めよ.

2  $a > 0$  とする. 以下の問題における曲線の長さ  $l$  を求めよ.

(1) 次の曲線

$$y = a \cosh \frac{x}{a}$$

を考える.  $b > 0$  に対し, この曲線の区間  $[-b, b]$  における長さ  $l$  を求めよ.

(2) 次の極方程式はアルキメデスの螺旋と呼ばれる.

$$r = a\theta.$$

このとき  $\theta$  が区間  $[0, 2\pi]$  を動くときの曲線の長さ  $l$  を求めよ.

(3) 次の極方程式は等角螺旋と呼ばれる.

$$r = e^{-a\theta}.$$

広義積分を使い,  $\theta$  が区間  $[0, \infty)$  を動くときの曲線の長さ  $l$  を求めよ.