初等関数 (逆三角関数)　問題 3　解答

[解法] 三角関数の加法定理を使って $\tan A$ の値をもとめる．このとき, $\tan^{-1} 1 = \dfrac{\pi}{4}$ である一方で,

$$\tan A = 1 \text{ ならば } A = \frac{\pi}{4} + n\pi \qquad (\ n \text{ は整数 })$$

となることに注意する．A の正確な値を求めるには, 逆三角関数の取りうる値の範囲を考える必要がある.

三角関数 $\sin x,\ \cos x,\ \tan x$ に対して, 逆三角関数を $\sin^{-1} x,\ \cos^{-1} x,\ \tan^{-1} x$ と表記する. このとき, 次の値を求めよ.

$\boxed{1}$ $A = 2\tan^{-1} 2 - \tan^{-1} 7$

[解]: 計算するために a, b を

$$a = \tan^{-1} 2, \qquad\qquad b = \tan^{-1} 7,$$

とおくと, $A = 2a - b$ かつ

$$\tan a = 2, \qquad\qquad \tan b = 7,$$

となる．ここで, $\tan 2a$ を倍角公式を使って計算すると,

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a} = -\frac{4}{3}$$

となる．さらに加法定理を使えば,

$$\tan A = \tan(2a - b) = \frac{\tan 2a - \tan b}{1 + \tan 2a \cdot \tan b} = 1.$$

この三角方程式を解くと,

$$A = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad (n \text{ は整数})$$

となる．任意の実数 x に対して $-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \dfrac{\pi}{2}$ かつ $\tan^{-1} x$ は単調増加関数であることに注意すると, 値 A の取りうる範囲は

$$\frac{\pi}{2} < 2\tan^{-1} 2 < \pi, \qquad\qquad -\frac{\pi}{2} < -\tan^{-1} 7 < -\frac{\pi}{4},$$

となる．不等式を足し合わせば

$$0 < A < \frac{3}{4}\pi.$$

したがって, $A = \dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{2}$ $A = \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 5 + \tan^{-1} 8$

[解]: 計算するために a, b, c を

$$a = \tan^{-1} 2, \qquad\qquad b = \tan^{-1} 5, \qquad\qquad c = \tan^{-1} 8,$$

とおくと, $A = a + b + c$ かつ

$$\tan a = 2, \qquad \tan b = 5, \qquad \tan c = 8,$$

となる．ここで, $\tan(a+b)$ を加法定理を使って計算すると,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = -\frac{7}{9}$$

となる．再び加法定理を使えば,

$$\tan A = \tan(a+b+c) = \frac{\tan(a+b) + \tan c}{1 - \tan(a+b) \cdot \tan c} = 1.$$

この三角方程式を解くと,

$$A = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad (n \text{ は整数})$$

となる．任意の実数 x に対して $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ かつ $\tan^{-1} x$ は単調増加関数であることに注意すると, 値 A の取りうる範囲は

$$\frac{\pi}{4} < \tan^{-1} 2 < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{4} < \tan^{-1} 5 < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{4} < \tan^{-1} 8 < \frac{\pi}{2},$$

となる．不等式を足し合わせば

$$\frac{3}{4}\pi < A < \frac{3}{2}\pi.$$

したがって, $A = \frac{5}{4}\pi$.

$\boxed{3}$ $A = \tan^{-1} 5 - \tan^{-1} 3 + \tan^{-1} 8$

[解]: 計算するために a, b, c を

$$a = \tan^{-1} 5, \qquad b = \tan^{-1} 3, \qquad c = \tan^{-1} 8,$$

とおくと, $A = a - b + c$ かつ

$$\tan a = 5, \qquad \tan b = 3, \qquad \tan c = 8,$$

となる．ここで, $\tan(a-b)$ を加法定理を使って計算すると,

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} = \frac{1}{8}$$

となる．ここで, 三角関数の基本公式 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan x}$ より,

$$\tan(a-b) = \frac{1}{\tan c} = \tan\left(\frac{\pi}{2} - c\right).$$

したがって,

$$A = a - b + c = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad (n \text{ は整数})$$

となる．任意の実数 x に対して $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ かつ $\tan^{-1} x$ は単調増加関数であることに注意すると, 値 A の取りうる範囲は

$$\frac{\pi}{4} < \tan^{-1} 5 < \frac{\pi}{2}, \qquad -\frac{\pi}{2} < -\tan^{-1} 3 < -\frac{\pi}{4}, \qquad \frac{\pi}{4} < \tan^{-1} 8 < \frac{\pi}{2},$$

となる．不等式を足し合わせば

$$0 < A < \frac{3}{4}\pi.$$

したがって, $A = \frac{\pi}{2}$.

$\boxed{4}$ $A = \tan^{-1} 2 + \tan^{-1} 4 + \tan^{-1} 13$

[解]: 計算するために a, b, c を

$$a = \tan^{-1} 2, \qquad b = \tan^{-1} 4, \qquad c = \tan^{-1} 13,$$

とおくと, $A = a + b + c$ かつ

$$\tan a = 2, \qquad \tan b = 4, \qquad \tan c = 13,$$

となる．ここで, $\tan(a+b)$ を加法定理を使って計算すると,

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b} = -\frac{6}{7}$$

となる．再び加法定理を使えば,

$$\tan A = \tan(a+b+c) = \frac{\tan(a+b) + \tan c}{1 - \tan(a+b) \cdot \tan c} = 1.$$

この三角方程式を解くと,

$$A = \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad (n \text{ は整数})$$

となる．任意の実数 x に対して $-\frac{\pi}{2} < \tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}$ かつ $\tan^{-1} x$ は単調増加関数であることに注意すると, 値 A の取りうる範囲は

$$\frac{\pi}{4} < \tan^{-1} 2 < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{4} < \tan^{-1} 4 < \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{4} < \tan^{-1} 13 < \frac{\pi}{2},$$

となる．不等式を足し合わせば

$$\frac{3}{4}\pi < A < \frac{3}{2}\pi.$$

したがって, $A = \frac{5}{4}\pi$.