

§4 平均値の定理とその応用 演習問題2

📎 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (☆☆☆)(不等式の証明)

平均値の定理を用いて次の不等式を示せ：

$$\frac{b-a}{1+b^2} < \text{Arctan } b - \text{Arctan } a < \frac{b-a}{1+a^2},$$

ただし、 $0 < a < b$ とする。

2 (★★☆)(極限の導出)

$f(x)$ は区間 I で C^2 級 (すなわち第2次導関数 f'' が存在して f'' が連続) であるとする。極限

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)}{h^2}$$

を求めよ。

3 (★★☆)(等式の証明)

$-1 \leq x < 1$ のとき、 $\text{Arcsin } x = 2\text{Arctan } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \frac{\pi}{2}$ が成り立つことを、

$$f(x) := \text{Arcsin } x - 2\text{Arctan } \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

とにおいて、導関数 $f'(x)$ が恒等的に0であることを示すことによって、証明せよ。