§4 平均値の定理とその応用　演習問題3

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★☆☆)(**不等式の証明①**)

$\varphi(x)$ はすべての実数 x で微分可能で，$\varphi(0)=0$ かつ，すべての $x \geqq 0$ に対して $\varphi(x) \geqq x$ を満たしている．このとき任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$0 < t < \varepsilon$ をみたす t で $\varphi'(t) \geqq 1$ となるものが存在することを示せ．

$\boxed{2}$ (★★☆)(**不等式の証明②**)

任意の $x \geqq 0$ に対して，

$$1+x \leqq \frac{e}{e-1}\left(1+\int_0^x (1+t)^{-1} t\,\mathrm{d}t\right)$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{3}$ (★★★)(**不等式の証明③**)

$p>1$ とする．任意の $x \geqq 0$ に対して，

$$(1+x)^p \leqq \gamma_p\left(1+\int_0^x (1+t)^{p-2} t\,\mathrm{d}t\right), \qquad \gamma_p := \frac{p}{1-(1+p(p-1))^{\frac{1}{1-p}}}$$

が成り立つことを示せ．さらに，$\displaystyle\lim_{p\to 1}\gamma_p = \frac{e}{e-1}$ であることを示せ．

$\boxed{4}$ (★☆☆)(**極限への応用**)

極限 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{\sin x}}{x-\sin x}$ を求めよ．