高階導関数とテイラーの定理　演習問題３　解答例

問題 1. 関数 f は $x=0$ を含む区間で微分可能とする．$f(0)=p(0)$，$f'(0)=p'(0)$ となるような 1 次以下の多項式関数 p を求めよ．

解答. $p(x)=a_0+a_1x$ とおく．$p(0)=a_0$ であるから，$a_0=f(0)$．また，$p'(x)=a_1$ より $a_1=f'(0)$ となる．以上より $p(x)=f(0)+f'(0)x$.

問題 2. 関数 f は $x=0$ を含む区間で n 回微分可能とする．すべての $k\,(0\le k\le n)$ について $f^{(k)}(0)=p^{(k)}(0)$ となるような n 次以下の多項式関数 p を求めよ．

解答.

$$p(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$$

とおく．$p(0)=a_0$ となるので $a_0=f(0)$．また，

$$p'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}=\sum_{j=1}^{n}ja_jx^{j-1}$$

より，$p'(0)=a_1$ となるので $a_1=f'(0)$ となる．同様にして各 $k\,(0\le k\le n)$ について

$$\begin{aligned}p^{(k)}(x)&=k!a_k+(k+1)k\cdots 2a_{k+1}x+\cdots+n(n-1)\cdots(n-k+1)a_nx^{n-k}\\&=\sum_{j=k}^{n}j(j-1)\cdots(j-k+1)a_jx^{j-k}\end{aligned}$$

より，$p^{(k)}(0)=k!a_k$ であるから $a_k=f^{(k)}(0)/k!$ を得る．よって

$$p(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

問題 3. 関数 f は $x=a$ を含む区間で n 回微分可能とする．このとき以下の問に答えよ．

(i) $x=0$ を含む小区間で $g(x)=f(x+a)$ で定まる関数 g を考えることで，すべての $k\,(0\le k\le n)$ について $g^{(k)}(0)=q^{(k)}(0)$ となる多項式関数 q を求めよ．

解答. 合成関数の微分より g は $x=0$ を含む小区間で微分可能で

$$g'(x)=f'(x+a)\cdot(x+a)'=f'(x+a)$$

とわかり $g'(0)=f'(a)$ を得る．同様にして各 $0\le k\le n$ について $g^{(k)}(0)=f^{(k)}(a)$ とわかる．前問の結果と合わせると

$$\begin{aligned}q(x)&=g(0)+\frac{g'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{g^{(n)}(0)}{n!}x^n\\&=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}x^k\end{aligned}$$

とわかる．

(ii) すべての $k\,(0 \leq k \leq n)$ について $f^{(k)}(a) = p^{(k)}(a)$ となるような n 次以下の多項式関数 p を求めよ.

解答.

$$\begin{aligned} p(x) &= q(x-a) \\ &= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \end{aligned}$$

を考えると，これは n 次以下の多項式であって，合成関数の微分よりすべての $0 \leq k \leq n$ について $p^{(k)}(a) = q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$ が成立する．よってこの p が求める多項式関数である.

注意．

- **問題 3** で行ったように，$x = a$ の近くで定められた関数 f に対し $g(x) = f(x+a)$ を考えて（関数を平行移動して）$x = 0$ の近くでの議論を適用することが多々ある．逆に $x = 0$ の近くで定められた関数 f に対して，a だけ平行移動した $x = a$ の近くで定められた関数 $g(x) = f(x-a)$ を考えることもよくある.
- **問題 3** の結果より，関数 f が $x = a$ を含む区間で n 回微分可能なとき，$x = a$ における n 階までの微分係数がすべて等しいという意味で "よく似ている" 多項式関数は

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

である．テイラーの定理はその多項式 p と元の関数 f の誤差 $f(x) - p(x)$ が $x \to a$ のとき $|x-a|^n$ より速く 0 に収束する，すなわち

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - p(x)}{(x-a)^n} = 0$$

であることや，さらに f が $n+1$ 回微分可能であれば x ごとに誤差 $f(x) - p(x)$ がある $0 < \theta < 1$ を用いて

$$\frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

と表せることを主張している.