§6 Taylor の定理とその応用　演習問題 2　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★★)(Taylor の定理の積分形)

次の各問いに答えよ.

(1) n を自然数，$I \subseteq \mathbb{R}$ を開区間とし，$f(x)$ を I 上の C^n 級関数とする．このとき任意の $a,\ x \in I$ に対して，等式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$

が成り立つことを示せ.

(2) $n \geqq 2$ を自然数とする．(1) を用いて，$x \in (-1, 1)$ に対する不等式

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqq \frac{|x|^n}{n(1-|x|)^2}$$

を示したのち，等式

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad x \in (-1, 1)$$

を示せ.

解 (1)　微積分の基本定理と部分積分により

$$\begin{aligned}
f(x) - f(a) &= \int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x \{-(x-t)\}' f'(t)\,dt \\
&= -(x-t)f'(t)\Big|_{t=a}^{x} + \int_a^x (x-t) f''(t)\,dt \\
&= (x-a)f'(a) + \int_a^x \left\{ -\frac{(x-t)^2}{2} \right\}' f''(t)\,dt \\
&= (x-a)f'(a) - \frac{(x-t)^2}{2} f''(t)\Big|_{t=a}^{x} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt \\
&= (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \int_a^x \left\{ -\frac{(x-t)^3}{3!} \right\}' f'''(t)\,dt
\end{aligned}$$

$$= (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) - \frac{(x-t)^3}{3!}f'''(t)\Big|_{t=a}^{x} + \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3!}f^{(4)}(t)\,dt.$$

以下，これを帰納的に繰り返して，

$$f(x) - f(a) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n)}(t)\,dt$$

i.e.,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt.$$

(2)　$f(x) := \log(1+x)$ とする．$k \geqq 1$ のとき，

$$f^{(k)}(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^{(k-1)} = (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$$

ゆえ，$f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}\Big|_{x=0} = (-1)^{k-1}(k-1)!$．また，$f(0) = 0$ に注意すると (1) より

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}f^{(n)}(t)\,dt$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + (-1)^{n-1}\int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n}\,dt$$

$$=: \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + R_n(x) \quad \cdots ①.$$

ここで，$0 \leqq x < 1$ のとき $0 \leqq t \leqq x$ で $\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n} \geqq 0$ であるから

$$|R_n(x)| \leqq \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n}\,dt$$

$$\leqq \int_0^x (x-t)^{n-1}\,dt \quad (\because 1+t \geqq 1)$$

$$= -\frac{1}{n}(x-t)^n\Big|_{t=0}^{x} = \frac{x^n}{n} \leqq \frac{|x|^n}{n(1-|x|)^2}.$$

一方，$-1 < x < 0$ のとき，$R_n(x) = (-1)^n \int_x^0 \frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n}\,dt$ であり，$x \leqq t \leqq 0$ において $\frac{(x-t)^{n-1}}{(1+t)^n} \leqq 0$ だから，

$$
\begin{aligned}
|R_n(x)| &\leqq \int_x^0 \frac{|(x-t)^{n-1}|}{(1+t)^n}\,dt = \int_x^0 \frac{(t-x)^{n-1}}{(1+t)^n}\,dt \\
&= \int_x^0 \frac{1}{1+t}\left(\frac{t-x}{1+t}\right)^{n-1} dt \\
&\leqq \frac{1}{1+x}\int_x^0 \left(\frac{t-x}{1+t}\right)^{n-1} dt.
\end{aligned}
$$

ここで，$s = \dfrac{t-x}{1+t}$ の変数変換を考えると $t : x \to 0$ のとき $s : 0 \to -x$ であり，$t = \dfrac{s+x}{1-s}$ より $\dfrac{dt}{ds} = \dfrac{1+x}{(1-s)^2}$ であるから，

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1+x}\int_x^0 \left(\frac{t-x}{1+t}\right)^{n-1} dt &= \frac{1}{1+x}\int_0^{-x} s^{n-1}\frac{1+x}{(1-s)^2}\,ds \\
&\leqq \frac{1}{(1+x)^2}\int_0^{-x} s^{n-1}\,ds \quad (\because 1-s \geqq 1+x) \\
&= \frac{1}{(1+x)^2}\frac{(-x)^n}{n} = \frac{|x|^n}{n(1-|x|)^2}.
\end{aligned}
$$

したがって，$x \in (-1, 1)$ の場合に

$$
|R_n(x)| \leqq \frac{|x|^n}{n(1-|x|)^2} \quad \cdots ②
$$

が成り立つ．ゆえに①, ②より所望の不等式

$$
\left|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k\right| \leqq \frac{|x|^n}{n(1-|x|)^2}
$$

が得られ，$n \to \infty$ のとき $|x| < 1$ より右辺は零に収束するから，

$$
\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k
$$

であることが示された． ∎

$\boxed{2}$ (★★☆)(不定形の極限)

$f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の C^3 級関数で，ある正定数 M が存在して，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $|f^{(3)}(x)| \leqq M$ であるとする．$\boxed{1}$-(1) を用いて

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2f(0) + f(-x)}{x^2} = f''(0)$$

であることを示せ．

解 $\boxed{1}$-(1) より $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上の C^3 級関数だから，

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{1}{2!} \int_0^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt \quad \cdots ⓪.$$

ここで $R(x) := \dfrac{1}{2!} \displaystyle\int_0^x (x-t)^2 f^{(3)}(t)\, dt$ とおくと，仮定よりすべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $|f(x)| \leqq M$ であるから，$x > 0$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{R(x)}{x^2}\right| &\leqq \frac{1}{2x^2} \int_0^x (x-t)^2 \underbrace{|f^{(3)}(t)|}_{\leqq M}\, dt \\ &\leqq \frac{M}{2x^2} \left\{ -\frac{(x-t)^3}{3} \right\} \Bigg|_{t=0}^{x} = \frac{M}{6} x \to 0 \ \ (x \searrow 0).\end{aligned}$$

$x < 0$ のとき

$$\begin{aligned}\left|\frac{R(x)}{x^2}\right| &\leqq \frac{1}{2x^2} \int_x^0 (x-t)^2 \underbrace{|f^{(3)}(t)|}_{\leqq M}\, dt \\ &\leqq \frac{M}{2x^2} \left\{ -\frac{(x-t)^3}{3} \right\} \Bigg|_{t=x}^{0} = \frac{M}{6} (-x) \to 0 \ \ (x \nearrow 0).\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{R(x)}{x^2} = 0 \quad \cdots$ ① である．今，⓪の

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + R(x) \quad \cdots ②$$

において，x を $-x$ に置き換えると

$$f(-x) = f(0) - f'(0)x + \frac{1}{2} f''(0)x^2 + R(-x) \quad \cdots ③$$

だから，①および②,③より $x \to 0$ のとき

$$\left| \frac{f(x) - 2f(0) + f(-x)}{x^2} - f''(0) \right| \leqq \left| \frac{R(x)}{x^2} \right| + \left| \frac{R(-x)}{(-x)^2} \right|$$

$$\to 0$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - 2f(0) + f(-x)}{x^2} = f''(0).$ ∎