§6 Taylor の定理とその応用　演習問題 2

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★★★)(Taylor の定理の積分形)

次の各問いに答えよ．

(1) n を自然数，$I \subseteq \mathbb{R}$ を開区間とし，$f(x)$ を I 上の C^n 級関数とする．このとき任意の $a, x \in I$ に対して，等式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\,dt$$

が成り立つことを示せ．

(2) $n \geqq 2$ を自然数とする．(1) を用いて，$x \in (-1,1)$ に対する不等式

$$\left| \log(1+x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \right| \leqq \frac{|x|^n}{n(1-|x|)^2}$$

を示したのち，等式

$$\log(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k, \quad x \in (-1,1)$$

を示せ．

$\boxed{2}$ (★★☆)(不定形の極限)

$f(x)$ を $\mathbb{R}$ 上の C^3 級関数で，ある正定数 M が存在して，すべての $x \in \mathbb{R}$ に対し $|f^{(3)}(x)| \leqq M$ であるとする．$\boxed{1}$-(1) を用いて

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 2f(0) + f(-x)}{x^2} = f''(0)$$

であることを示せ．