

§8 積分の定義と基本性質 演習問題 1

📎 問題の難易度の目安 【基礎】 ★☆☆ 【標準】 ★★★ 【発展】 ★★★

1 (★★☆)(定義から計算①)

積分の定義にしたがって、定積分 $\int_0^1 x dx$ を求めよ。

2 (★★☆)(定義から計算②)

次の各問いに答えよ。

(1) 積 \leftrightarrow 和の公式を用いて、

$$\sin \frac{\theta}{2} \sum_{k=1}^n \sin k\theta = \sin \frac{n+1}{2}\theta \sin \frac{n}{2}\theta$$

であることを示せ。

(2) 積分の定義にしたがって、定積分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$ を求めよ。

3 (★★☆)(区分求積法①)

区分求積法を用いて、次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right)$.

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(1 + \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n} \right) \right\}^{\frac{1}{n}}$.

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1^2}{n^2} \right) \left(1 + \frac{2^2}{n^2} \right) \cdots \left(1 + \frac{n^2}{n^2} \right) \right\}^{\frac{1}{n}}$.

4 (★★☆)(区分求積法②)

$AB = 2a$ を直径とする半円周を $A = X_0, X_1, \dots, X_n = B$ で n 等分して、 $\triangle AX_k B$ の面積を S_k

とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k$ を求めよ。