

§8 積分の定義と基本性質 演習問題2

📎 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (☆☆☆)(周期関数に対する積分の性質)

関数 $f = f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が T -周期 ($T \in \mathbb{R}, T \neq 0$) であるとは、すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(t+T) = f(t) \quad (*)$$

が成り立つことをいう。定義から、周期 T は一意ではない。実際、 f が T -周期ならば任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して f は nT -周期でもある。 $(*)$ が成り立つような最小の T のことを**基本周期**とよぶ。

以下、 $f = f(t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ がある $T > 0$ に対して T -周期であるとする。このとき、任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_0^T f(t) dt = \int_a^{a+T} f(t) dt$$

が成り立つことを示せ。

2 (★★☆)(周期関数と極限)

n を自然数とすると、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} |x^2 \sin nx| dx$$

を求めよ。