§1 多変数関数の極限と連続性　演習問題２　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★

1 (★☆☆)(多変数関数の極限)

次の極限値を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+3y^2}{2x^2+y^2}$.

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$.　　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$.　　(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3x^2+y^2}{x^2+4y^2}$.

解 (1)　$|xy^2| \leqq (|x|+|y|)\,(x^2+y^2)$ であるから，

$$0 \leqq \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right| \leqq |x|+|y| \to 0 \quad (\,(x,y)\to(0,0)\,)\,.$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \mathbf{0}$.

【別解（極座標)】 $x = r\cos\theta,\ y = \sin\theta$ とおく．$(x,y)\to(0,0) \iff r \searrow 0$ であることに注意．
$f(x,y) := \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$ とおけば

$$0 \leqq |f(r\cos\theta,\, r\sin\theta)| = r|\cos\theta\sin\theta| \leqq r \searrow 0.$$

(2)　$f(x,y) := \dfrac{xy+3y^2}{2x^2+y^2}$ とおく．(x,y) が $y=x$ に沿って原点へ近づくとき，

$$f(x,x) = \frac{x^2+3x^2}{2x^2+x^2} = \frac{4}{3} \to \frac{4}{3} \quad (\,x\to 0\,)\cdots①.$$

一方，(x,y) が $y=-x$ に沿って原点へ近づくとき，

$$f(x,-x) = \frac{-x^2+3x^2}{2x^2+x^2} = \frac{2}{3} \to \frac{2}{3} \quad (\,x\to 0\,)\cdots②.$$

①,②より原点への近づき方で極限値が異なるから，**(2) の極限値は存在しない**.

(3)　$|x^2+xy^2| \leqq (|x|+|y|)\,(x^2+y^2)$ であるから，

$$0 \leqq \left|\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}\right| \leqq |x|+|y| \to 0 \quad (\,(x,y)\to(0,0)\,)\,.$$

ゆえに，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2} = \mathbf{0}$.

【別解（極座標）】 $x = r\cos\theta,\ y = \sin\theta$ とおく．再び $(x,y) \to (0,0) \iff r \searrow 0$ であることに注意．$f(x,y) := \dfrac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$ とおけば

$$0 \leqq |f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)| = r|\cos^3\theta + \cos\theta\sin^2\theta| \leqq 2r \searrow 0.$$

(4) 極座標変換を考える．$f(x,y) := \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ とおけば，$r \searrow 0$ のとき

$$0 \leqq |f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)| = r\,|\cos\theta\sin\theta| \leqq r \searrow 0.$$

したがって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathbf{0}.$

(5) 極座標変換を考える．$f(x,y) := \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$ とおくと，

$$f(r\cos\theta,\ r\sin\theta) = \frac{1}{r^2}\cos^2\theta\sin^2\theta \cdots ①$$

であるから，θ がどのような値を取っても $r \searrow 0$ のとき，①は $+\infty$ に発散する．したがって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3} = +\boldsymbol{\infty}.$

(6) $f(x,y) := \dfrac{x^3+3x^2+y^2}{x^2+4y^2}$ とおく．(x,y) が x 軸に沿って原点に近づくとき，

$$f(x,0) = x + 3 \to 3 \quad (x \to 0) \cdots ①.$$

一方，(x,y) が y 軸に沿って原点に近づくとき

$$f(0,y) = \frac{1}{4} \to \frac{1}{4} \quad (y \to 0) \cdots ②.$$

①,②より原点への近づき方で極限値が異なるから，**(6) の極限値は存在しない**． ∎

2 (★★☆)(多変数関数の連続性①)

次の関数の原点における連続性を調べよ．

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \cdots \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \cdots \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

(2) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2} & \cdots \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \cdots \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

解 (1) $|x^3+y^3| \leqq (|x|+|y|)(x^2+y^2)$ であるから，$(x,y) \to (0,0)$ のとき

$$0 \leqq |f(x,y)| = \left|\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right| \leqq |x| + |y| \to 0.$$

よって，$f(x,y)$ の定義と合わせて $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ を得るから，$f(x,y)$ は**原点で連続である**.

(2)　$g(x,y)$ が原点で連続であるとすると，$g(x,y)$ の定義と合わせて

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = 0 = f(0,0) \quad \cdots\cdots ①$$

が成り立つ．①は (x,y) が原点にどのような近づき方をしても $g(x,y)$ は $0 = g(0,0)$ に収束することを意味していることに注意．いま $g(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2}$ $(\,(x,y) \neq (0,0)\,)$ に対して，(x,y) が y 軸に沿って原点に近づくとき，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(0,y) = \frac{1}{2}$$

となって①に矛盾する．したがって $g(x,y)$ は**原点で連続でない**. ∎

3 (★★☆)(多変数関数の連続性②)

$\mathbb{R}^2$ 全体で定義された 2 変数関数は，$(x,y) \neq (0,0)$ に対して

$$f(x,y) := \frac{1-e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}$$

で定義されているとする．$f(x,y)$ が原点で連続となるように，$f(0,0)$ の値を定めよ．

解 極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を考える．$r \searrow 0$ のとき

$$f(r\cos\theta,\, r\sin\theta) = \frac{1-e^{-r^2}}{r^2} \overset{h\equiv r^2 とおく}{=} \frac{1}{e^h}\cdot\frac{e^h-1}{h} \to 1.$$

よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ であるから，$\boldsymbol{f(0,0)=1}$ と定めれば，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ となって，確かに $f(x,y)$ は原点で連続となる. ∎