§1 多変数関数の極限と連続性　演習問題 2

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★☆☆)(**多変数関数の極限**)

次の極限値を調べよ．

(1) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^2}$.　　(2) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy+3y^2}{2x^2+y^2}$.

(3) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}$.　　(4) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

(5) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^3}$.　　(6) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+3x^2+y^2}{x^2+4y^2}$.

$\boxed{2}$ (★★☆)(**多変数関数の連続性①**)

次の関数の原点における連続性を調べよ．

(1) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \cdots \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \cdots \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2) $$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x^2+2y^2} & \cdots \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \cdots \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$\boxed{3}$ (★★☆)(**多変数関数の連続性②**)

$\mathbb{R}^2$ 全体で定義された 2 変数関数は，$(x,y) \neq (0,0)$ に対して

$$f(x,y) := \frac{1-e^{-(x^2+y^2)}}{x^2+y^2}$$

で定義されているとする．$f(x,y)$ が原点で連続となるように，$f(0,0)$ の値を定めよ．