§11 積分の順序交換　演習問題 2　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★★)(順序交換を用いた等式の証明)

次の各問いに答えよ．

(1) 実数 $y > 1$ を定数とみて，定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{y-\cos x}$ を計算せよ．

✓**HINT.** 変数変換 $\tan\frac{x}{2} = t$ を考える．

(2) $1 < a < b$ のとき，

$$\int_0^\pi \log\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x}\right) dx = \pi\log\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}}\right)$$

であることを積分の順序交換を用いることにより求めよ．

✓**HINT.** 長方形領域 $D = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq \pi, a \leqq y \leqq b\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y-\cos x}\,dxdy$ を計算する．

解　(1)　$\tan\frac{x}{2} = t$ の変数変換を考えると，

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

であり，$\displaystyle\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right) = \frac{1+t^2}{2}$，$x : 0 \to \pi \ \longleftrightarrow\ t : 0 \to +\infty$ だから，

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \frac{dx}{y-\cos x} &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{y-\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)y-(1-t^2)}\,dt \\
&= \frac{2}{y+1}\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^2+\left(\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\right)^2} \\
&= \frac{2}{y+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}\left[\mathrm{Arctan}\left(\sqrt{\frac{y-1}{y+1}}\,t\right)\right]_{t=0}^{+\infty} \\
&= \frac{2}{\sqrt{y^2-1}}\cdot\frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}}
\end{aligned}$$

(2)　長方形領域 $D = \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq \pi, a \leqq y \leqq b\}$ 上で $f(x,y) := \dfrac{1}{y-\cos x}$ は連続である．

まず D を縦線領域とみて x 変数から先に積分する．(1) の結果を用いると

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_a^b \left(\int_0^\pi \frac{1}{y-\cos x}\,dx \right) dy \\
&\overset{(1)}{=} \int_a^b \frac{\pi}{\sqrt{y^2-1}}\,dy \\
&= \pi \int_a^b \log(y+\sqrt{y^2-1})'\,dy \\
&= \Big[\pi \log(y+\sqrt{y^2-1}) \Big]_{y=a}^b = \pi \log\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} \right) \quad \cdots ①.
\end{aligned}
$$

一方，D を横線領域をみなして，y 変数から先に積分すると

$$
\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \int_0^\pi \left(\int_a^b \frac{1}{y-\cos x}\,dy \right) dx \\
&= \int_0^\pi \Big[\log(y-\cos x) \Big]_{y=a}^b\,dx \\
&= \int_0^\pi \log\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x} \right) dx \quad \cdots ②.
\end{aligned}
$$

したがって，①,②より所望の等式

$$
\int_0^\pi \log\left(\frac{b-\cos x}{a-\cos x} \right) dx = \pi \log\left(\frac{b+\sqrt{b^2-1}}{a+\sqrt{a^2-1}} \right)
$$

を得る． ∎

Check

$\cosh x := \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$,　$\sinh x := \dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ とおく（これらは双曲線関数とよばれる）．簡単な計算により

$$
\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = (\cosh^{-1} x)', \qquad \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = (\sinh^{-1} x)'
$$

が確かめられる．逆双曲線関数 $\cosh^{-1} x$，$\sinh^{-1} x$ の値がそれぞれ $\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$，$\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ と求まることから一般に次の公式が成り立つ：

$$
\boldsymbol{\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm 1}}\,dx = \log\left(x+\sqrt{x^2\pm 1}\right)}
$$

また上の公式は変数変換 $s = x+\sqrt{x^2\pm 1}$ によって直接求めることもできる．[a]

[a] この変数変換 $s = x+\sqrt{x^2\pm 1}$ 自体が元々は双曲線 $x^2-y^2=\pm 1$ に沿うパラメータから起因するものである．

$\boxed{2}$ (★★★)(積分記号下の微分)

$f(x,y)$ は長方形領域 $D := \{(x,y)\ :\ a \leqq x \leqq b,\ c \leqq y \leqq d\}$ 上で偏微分可能で，偏導関数 $f_y(x,y)$ は D 上連続であるとする．このとき，

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx = \int_a^b f_y(x,y)\,dx$$

が成り立つことを示せ．

解 $f_y(x,y)$ は $a \leqq x \leqq b$ で連続だから，特に積分可能である．$G(y) := \displaystyle\int_a^b f_y(x,y)\,dx$ とおく．$y \in (c,d)$ を任意に 1 つとって固定する．$G(t)$ は t の関数として $c \leqq t \leqq y$ で連続だから，積分の順序交換を用いると

$$\begin{aligned}
\int_a^y G(t)\,dt &= \int_c^y \left(\int_a^b f_t(x,t)\,dx\right) dt \\
&= \int_a^b \left(\int_c^y f_t(x,t)\,dt\right) dx \\
&= \int_a^b \big[f(x,t)\big]_{t=c}^{y}\,dx \\
&= \int_a^b f(x,y)\,dx - \underbrace{\int_a^b f(x,c)\,dx}_{\text{定数}}
\end{aligned}$$

ゆえに両辺を y で微分して，微積分の基本定理を左辺に適用すると

$$G(y) = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)\,dx$$

となって証明終わり． ∎

$\boxed{3}$ (★★★)(e^{-x^2} の広義積分の計算)

実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$F(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$$

とおく．次の各問いに答えよ．

(1) $\boxed{2}$ の積分記号下での微分を用いて，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ を求めよ．

✓**HINT.** $f(t,x) := \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ とおく．長方形領域 $\{(t,x)\ :\ 0 \leqq t \leqq 1, -R \leqq x \leqq R\}$（ただし $R > 0$ は十分大きな任意の正数）で偏導関数 $f_x(t,x)$ が連続で

あることを確かめた後，積分記号下での微分を用いて計算を実行する．

(2) $F'(x) = 0$ を示せ．

(3) $F(x)$ を求めよ．

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ であることを示せ．

解 (1) $f(t,x) := \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ とおく．$R > 0$ は十分大きな任意の正数として，長方形領域 $\{(t,x) : 0 \leqq t \leqq 1, -R \leqq x \leqq R\}$ 上で偏導関数 $f_x(t,x)$ が連続であることを確かめよう．実際，

$$f_x(t,x) = \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} \cdot (-2x(1+t^2)) = -2xe^{-x^2(1+t^2)} \quad \cdots ①$$

は任意の $t \in [0,1]$ および任意の $x \in [-R,R]$ に対して連続である（$\because$ x および $e^{-x^2(1+t^2)}$ はそれぞれ連続だからその積もまた連続）．ゆえに，①および $\boxed{\mathbf{2}}$ の積分記号下での微分定理を適用するとすべての $x \in (-R,R)$ に対して

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt &= \frac{d}{dx}\int_0^1 f(t,x)\,dt \\ &= \int_0^1 f_x(t,x)\,dt \\ &= -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt\end{aligned}$$

が成り立つ．$R > 0$ は任意だったから，結局すべての実数 x に対して

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = \boldsymbol{-2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt}.$$

(2) $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt$ より (1) の結果および微積分の基本定理を用いると，

$$\begin{aligned}F'(x) &= 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt \frac{d}{dx}\int_0^x e^{-t^2}\,dt - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt \\ &= 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt \quad \cdots ②.\end{aligned}$$

第 2 項の積分において，$xt = s$ と変数変換すると，$t : 0 \to 1 \ \longleftrightarrow \ s : 0 \to x$，$dt = \frac{ds}{x}$ ゆえ

$$\int_0^1 e^{-x^2t^2}\,dt = \int_0^x e^{-s^2}\frac{ds}{x} = \frac{1}{x}\int_0^x e^{-s^2}\,ds \quad \cdots ③.$$

③を②へ代入して

$$F'(x) = 2\int_0^x e^{-t^2}\,dt \cdot e^{-x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot \frac{1}{x}\int_0^x e^{-s^2}\,ds = 0$$

が従う．(3)　(2) より $F(x) = C$（C: 定数）とおける．したがって

$$C = F(0) = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \big[\mathrm{Arctan}\,t\big]_{t=0}^1 = \frac{\pi}{4}.$$

すなわち，

$$\boldsymbol{F(x) = \frac{\pi}{4}}.$$

(4)　(3) の結果よりすべての $x \in \mathbb{R}$ に対して

$$\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{4} \quad \cdots ④$$

今，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $e^{-x^2(1+t^2)} \leqq e^{-x^2}$ であるから，$x \to +\infty$ のとき

$$0 \leqq \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt \leqq e^{-x^2}\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}e^{-x^2} \to 0$$

すなわち，はさみうちの原理より

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt = 0 \quad \cdots ⑤.$$

したがって，④で $x \to +\infty$ の極限へ移行して⑤を用いると

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

よって e^{-t^2} の非負値性より $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt \geqq 0$ であるから，

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \cdots ⑥.$$

さらに，関数 $t \mapsto e^{-t^2}$ は偶関数であるので，⑥から

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^x e^{-t^2}\,dt = 2\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

i.e.,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$$

となり，証明が完了した．　■