§11 積分の順序交換　演習問題 2

✎ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★★★)(**順序交換を用いた等式の証明**)　次の各問いに答えよ．

(1) 実数 $y > 1$ を定数とみて，定積分 $\displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{y - \cos x}$ を計算せよ．

✓HINT. 変数変換 $\tan \frac{x}{2} = t$ を考える．

(2) $1 < a < b$ のとき，

$$\int_0^\pi \log\left(\frac{b - \cos x}{a - \cos x}\right) dx = \pi \log\left(\frac{b + \sqrt{b^2 - 1}}{a + \sqrt{a^2 - 1}}\right)$$

であることを積分の順序交換を用いることにより求めよ．

✓HINT. 長方形領域 $D = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq \pi, a \leqq y \leqq b\}$ に対して重積分 $\displaystyle\iint_D \frac{1}{y - \cos x}\, dxdy$ を計算する．

$\boxed{2}$ (★★★)(**積分記号下の微分**)　$f(x, y)$ は長方形領域 $D := \{(x, y) : a \leqq x \leqq b, c \leqq y \leqq d\}$ 上で偏微分可能で，偏導関数 $f_y(x, y)$ は D 上連続であるとする．このとき，

$$\frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\, dx = \int_a^b f_y(x, y)\, dx$$

が成り立つことを示せ．

$\boxed{3}$ (★★★)(e^{-x^2} **の広義積分の計算**)　実数 $x \in \mathbb{R}$ に対して，

$$F(x) := \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2 + \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}\, dt$$

とおく．次の各問いに答えよ．

(1) $\boxed{2}$ の積分記号下での微分を用いて，$\displaystyle\frac{d}{dx}\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1 + t^2}\, dt$ を求めよ．

✓HINT. $f(t, x) := \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ とおく．長方形領域 $\{(t, x) : 0 \leqq t \leqq 1, -R \leqq x \leqq R\}$（ただし $R > 0$ は十分大きな任意の正数）で偏導関数 $f_x(t, x)$ が連続であることを確かめた後，積分記号下での微分を用いて計算を実行する．

(2) $F'(x) = 0$ を示せ．

(3) $F(x)$ を求めよ.

(4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt = \sqrt{\pi}$ であることを示せ.