

§13 重積分の応用 (体積編) 演習問題1 解答

📎 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (☆☆☆)(球の体積①)

半径 a の球の体積を求めよ。

解 半径 a の球 $B(a)$ は $B(a) = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$ と表される。よって、極座標

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

$$(0 \leq r \leq a, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

を用いると、 $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ だから、

$$\begin{aligned} \text{Vol}(B(a)) &= \iiint_{B(a)} dx dy dz = \left(\int_0^a r^2 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \\ &= 4\pi \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^a = \frac{4\pi a^3}{3}. \end{aligned}$$

2 (★★☆)(立体の体積①)

次の図形 F の体積を求めよ。ただし、 a, b, c は正の定数とする。

- (1) 平面 $ax + by + cz = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ で囲まれた図形 F .
- (2) $F = \{(x, y, z) : 0 \leq 3x + y \leq 1, 0 \leq y + 2z \leq 1, 0 \leq 2z + 3x \leq 1\}$.
- (3) $F = \left\{ (x, y, z) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}$.
- (4) $F = \{(x, y, z) : x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} \leq a^{2/3}\}$.

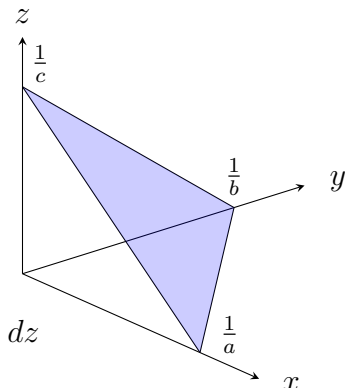
解

(1) 図形 F は

$$F = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq x \leq \frac{1}{a}, 0 \leq y \leq \frac{1}{b} - \frac{a}{b}x, 0 \leq z \leq \frac{1}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \right\}$$

で表される領域であるから、

$$\begin{aligned} \text{Vol}(F) &= \iiint_F dx dy dz = \int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}x} dy \int_0^{\frac{1}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y} dz \\ &= \int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}x} [z]_{z=0}^{\frac{1}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y} dy \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{1}{a}} dx \int_0^{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}x} \left(\frac{1}{c} - \frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \right) dy \\
 &= \frac{1}{c} \int_0^{\frac{1}{a}} \left[(1 - ax)y - \frac{b}{2}y^2 \right]_{y=0}^{\frac{1}{b} - \frac{a}{b}x} dx \\
 &= \frac{1}{2bc} \int_0^{\frac{1}{a}} (1 - ax)^2 dx \\
 &= \frac{1}{2bc} \left[-\frac{1}{3a}(1 - ax)^3 \right]_{x=0}^{\frac{1}{a}} = \frac{1}{6abc}.
 \end{aligned}$$

(2) 変数変換 $s = 3x + y$, $t = y + 2z$, $u = 2z + 3x$ に対する Jacobian は,

$$\frac{\partial(s, t, u)}{\partial(x, y, z)} = \det \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 12$$

であるから, $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(s, t, u)} = \left(\frac{\partial(s, t, u)}{\partial(x, y, z)} \right)^{-1} = \frac{1}{12}$ となる. 一方, この変数変換によって, 六面体 $F = \{(x, y, z) : 0 \leq 3x + y \leq 1, 0 \leq y + 2z \leq 1, 0 \leq 2z + 3x \leq 1\}$ は立方体

$$Q = \{(s, t, u) : 0 \leq s, t, u \leq 1\}$$

に写される. したがって,

$$\text{Vol}(F) = \iiint_F dx dy dz = \iiint_Q \frac{1}{12} ds dt du = \frac{1}{12}.$$

(3) $s = ax'$, $y = by'$, $z = cz'$ なるスケール変換で $F = \left\{ (x, y, z) : \left(\frac{x}{a} \right)^2 + \left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \leq 1 \right\}$ は

$$B(1) = \{(x', y', z') : (x')^2 + (y')^2 + (z')^2 \leq 1\}$$

に写される. また Jacobian は $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(x', y', z')} = \det \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = abc$ であるから, $\boxed{1}$ の球の体積

の結果を用いると,

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(F) &= \iiint_F dx dy dz = \iiint_{B(1)} abc dx' dy' dz' \\
 &= abc \text{Vol}(B(1)) = \frac{4\pi abc}{3}.
 \end{aligned}$$

(4) $x^{1/3} = u$, $y^{1/3} = v$, $z^{1/3} = w \iff x = u^3$, $y = v^3$, $z = w^3$ と変数変換すれば, 図形 F は

$$B(a^{1/3}) = \{(u, v, w) : u^2 + v^2 + w^2 \leq a^{2/3}\}$$

に写される. Jacobian は $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \det \begin{pmatrix} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3w^2 \end{pmatrix} = 27u^2v^2w^2$ であるから,

$$\text{Vol}(F) = \iiint_F dx dy dz = \iiint_{B(a^{2/3})} 27u^2v^2w^2 du dv dw \cdots \textcircled{1}.$$

さらに, 極座標変換

$$u = r \sin \theta \cos \varphi, \quad v = r \sin \theta \sin \varphi, \quad w = r \cos \theta \\ (0 \leq r \leq a, 0 \leq \pi \leq \theta, 0 \leq \varphi < 2\pi)$$

を用いると, $du dv dw = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ だから $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} \text{Vol}(F) &= 27 \int_0^{a^{2/3}} dr \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} (r \sin \theta \cos \varphi)^2 (r \sin \theta \sin \varphi)^2 (r \cos \theta)^2 \cdot r^2 \sin \theta d\varphi \\ &= 27 \left(\int_0^{a^{2/3}} r^8 dr \right) \left(\int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta \right) \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \right) \cdots \textcircled{2}. \end{aligned}$$

ここで, $I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n \omega d\omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと, 部分積分より $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} \omega (-\cos \omega)' d\omega \\ &= [\sin^{n-1} \omega (-\cos \omega)]_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} \omega \underbrace{\cos^2 \omega}_{=1-\sin^2 \omega} d\omega \\ &= (n-1)(I_{n-2} - I_n) \\ \iff I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}. \end{aligned}$$

これと $I_1 = 1, I_0 = \frac{\pi}{2}$ から

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin^5 \theta \cos^2 \theta d\theta &= 2 \int_0^{\pi/2} \sin^5 \theta (1 - \sin^2 \theta) d\theta \\ &= 2(I_5 - I_7) = 2 \left(I_5 - \frac{6}{7} I_5 \right) \\ &= \frac{2}{7} I_5 = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{16}{105} \cdots \textcircled{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= 4(I_2 - I_4) = 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \right) I_0 = \frac{\pi}{4} \cdots \textcircled{4}. \end{aligned}$$

以上, $\textcircled{3}, \textcircled{4}$ を $\textcircled{2}$ へ代入して

$$\text{Vol}(F) = 27 \cdot \frac{a^3}{9} \cdot \frac{16}{105} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{4}{35} \pi a^3.$$

■

3 (★★☆)(立体の体積②)

球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の共通部分 E の体積を求めよ.

解 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ より $|z| \leq \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ だから,

$$E = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, |z| \leq \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}\}$$

と表される. ゆえに,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \iiint_E dx dy dz = \iint_{\{x^2+y^2 \leq a^2\}} dx dy \int_{-\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}} dz \\ &= 2 \iint_{\{x^2+y^2 \leq a^2\}} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} dx dy \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \sqrt{4a^2 - r^2} r dr d\theta \quad (\text{極座標 } x = r \cos \theta, y = r \sin \theta) \\ &= 4\pi \left[-\frac{1}{3}(4a^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^a \\ &= \frac{4(8 - 3\sqrt{3})}{3} \pi a^3. \end{aligned}$$

4 (★★☆)(立体の体積③)

直交 2 円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y^2 + z^2 \leq a^2$ の共通部分 D の体積を求めよ.

解 $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq a^2, |z| \leq \sqrt{a^2 - y^2}\}$ と表されるから,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = \iint_{\{x^2+y^2 \leq a^2\}} dx dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dz \\ &= 2 \iint_{\{x^2+y^2 \leq a^2\}} \sqrt{a^2 - y^2} dx dy \\ &= 2 \int_{-a}^a dy \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2 - y^2} dy \\ &= 4 \int_{-a}^a (a^2 - y^2) dy \\ &= 8 \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^a = \frac{16}{3} a^3. \end{aligned}$$

【別解】(Cavalieriの原理)

D の平面 $y = t$ ($|t| \leq a$) による切り口の図形 D_t は正方形

$$D_t = \left\{ (x, z) : |x| \leq \sqrt{a^2 - t^2}, |z| \leq \sqrt{a^2 - t^2} \right\}$$

Check

でありその面積は $\text{Area}(D_t) = (2\sqrt{a^2 - t^2})^2 = 4(a^2 - t^2)$. ゆえに, Cavalieriの原理より

$$\text{Vol}(D) = \int_{-a}^a \text{Area}(D_t) dt = 4 \int_{-a}^a (a^2 - t^2) dt = \frac{16}{3} a^3.$$

5 (★★☆)(立体の体積④)

次の各曲面で囲まれた立体の体積を求めよ.

- (1) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) で囲まれた円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ の内部 D .
- (2) 放物面 $x^2 + y^2 = z$ と柱面 $x^2 + y^2 = 2z$ で囲まれた部分 E .
- (3) 曲面 $z^2 = 4ax$ ($a > 0$) と柱面 $x^2 + y^2 = ax$ で囲まれた部分 F .

解 (1) $D' := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq ax, y \geq 0\}$ とおく. 対称性より D' が球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ で囲まれた部分の体積の2倍が求める体積である.

ここで $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ より $z = \pm\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ であるから,

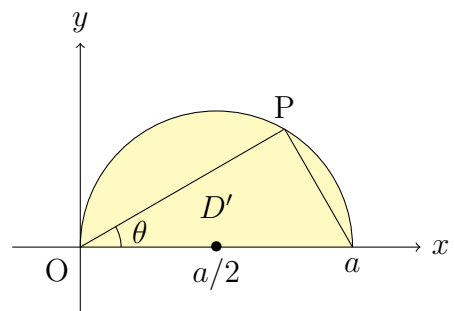
$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \iiint_D dx dy dz = 2 \iint_{D'} dx dy \int_{-\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} dz \\ &= 4 \iint_{D'} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy \quad \dots \textcircled{1}. \end{aligned}$$

極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ によって D' は

$$\left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq a \cos \theta, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

と表される. ゆえに, ①より

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= 4 \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^{a \cos \theta} \sqrt{a^2 - r^2} r dr \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \left[-\frac{1}{3} (a^2 - r^2)^{3/2} \right]_{r=0}^{a \cos \theta} d\theta \\ &= \frac{4a^3}{3} \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{4a^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \cdot 1 \right) = \frac{4}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right) a^3. \end{aligned}$$

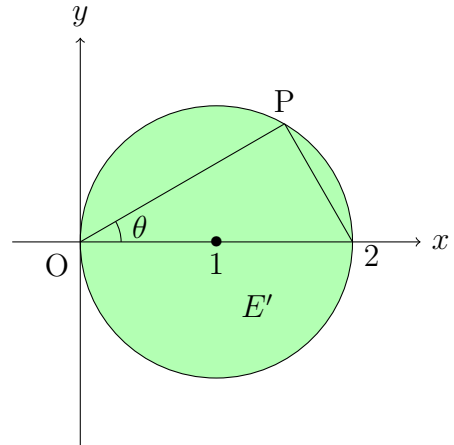


(2) $E' := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2x\}$ とおくと, 極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ によって E' は

$$\left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq 2 \cos \theta, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2} \right\}$$

と表されるので,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \iiint_E dx dy dz = \iint_{E'} dx dy \int_0^{x^2+y^2} dz \\ &= \iint_{E'} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{2 \cos \theta} r^2 r dr \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{2 \cos \theta} d\theta \\ &= 8 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta d\theta \\ &= 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$



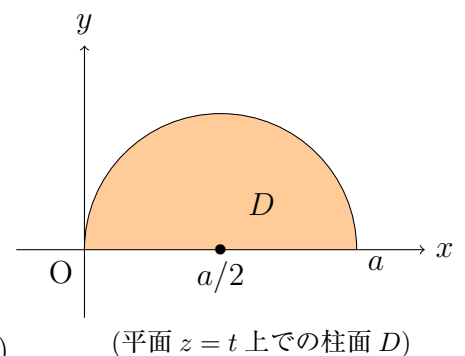
ただし, 最後の行で $J_n := \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta$ に対する漸化式 $J_n = \frac{n-1}{n} J_{n-2}$ ($n \geq 2$) を用いた.

(3) 対称性より $z \geq 0, y \geq 0$ の部分の体積を 4 倍したものが F の体積に等しい. 曲面 $z = 2\sqrt{a}\sqrt{x}$ と平面 $z = 0$ で挟まれた部分と柱面

$$\begin{aligned} D &= \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = ax, y \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq \sqrt{ax - x^2}\} \end{aligned}$$

で囲まれた立体 F_+ の体積は

$$\begin{aligned} \text{Vol}(F_+) &= \iint_D dx dy \int_0^{2\sqrt{a}\sqrt{x}} dz \\ &= \iint_D 2\sqrt{a}\sqrt{x} dx dy \\ &= \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax-x^2}} 2\sqrt{a}\sqrt{x} dy \\ &= 2\sqrt{a} \int_0^a \sqrt{x}\sqrt{ax-x^2} dx \\ &= 4\sqrt{a} \int_0^{\sqrt{a}} (at^2 - t^4) dt \quad (\because \sqrt{a-x} = t \text{ の変数変換}) \\ &= \frac{8}{15} a^3. \end{aligned}$$



したがって, 求めるべき F の体積は

$$\text{Vol}(F) = 4\text{Vol}(F_+) = \frac{32}{15} a^3.$$

■

6 (★★☆)(回転トーラスの体積)

次の3次元空間内の立体 \mathbf{T} の体積を求めよ.

$$\mathbf{T} := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$

解 \mathbf{T} を平面 $z = h$ ($-1 \leq h \leq 1$) で切断したときの切り口 \mathbf{T}_h は

$$\mathbf{T}_h : -\sqrt{4(1-h^2)} \leq \sqrt{x^2 + y^2} - 3 \leq \sqrt{4(1-h^2)}$$

で与えられる. \mathbf{T}_h は半径 $3 + \sqrt{4(1-h^2)}$ の円板から, 半径 $3 - \sqrt{4(1-h^2)}$ の円板をくり抜いたものである. \mathbf{T}_h の面積は

$$\begin{aligned} \text{Area}(\mathbf{T}_h) &= \pi \left\{ \left(3 + \sqrt{4(1-h^2)} \right)^2 - \left(3 - \sqrt{4(1-h^2)} \right)^2 \right\} \\ &= 24\pi\sqrt{1-h^2}. \end{aligned}$$

したがって Cavalieri の原理より

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\mathbf{T}) &= \int_{-1}^1 \text{Area}(\mathbf{T}_h) dh = 48\pi \underbrace{\int_0^1 \sqrt{1-h^2} dh}_{=\frac{\pi}{4}} \\ &= 12\pi^2. \end{aligned}$$

■

一般に, $\mathbb{T} : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R \right)^2 + z^2 = r^2$ ($R > r > 0$) を**回転トーラス**とよぶ. \mathbb{T} は円 $C : (x - R)^2 + z^2 = r^2$ を z 軸の周りに回転させて得られる立体で, パラメーター $\theta, \varphi \in [0, 2\pi]$ を用いて,

$$x = (R + r \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (R + r \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = r \sin \theta$$

Check

と表される. ここで取り上げた立体 \mathbf{T} は”中身の詰まった”トーラスであり, \mathbf{T} の境界(表面) $\frac{1}{4} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 + z^2 = 1$ は

$$x = (3 + 2 \cos \theta) \cos \varphi, \quad y = (3 + 2 \cos \theta) \sin \varphi, \quad z = \sin \theta$$

と表される.