

§13 重積分の応用 (体積編) 演習問題 1

📎 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (☆☆☆)(球の体積①) 半径 a の球の体積を求めよ.

2 (★★☆)(立体の体積①) 次の図形 F の体積を求めよ. ただし, a, b, c は正の定数とする.

(1) 平面 $ax + by + cz = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ で囲まれた図形 F .

(2) $F = \{(x, y, z) : 0 \leq 3x + y \leq 1, 0 \leq y + 2z \leq 1, 0 \leq 2z + 3x \leq 1\}$.

(3) $F = \left\{ (x, y, z) : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1 \right\}$.

(4) $F = \{(x, y, z) : x^{2/3} + y^{2/3} + z^{2/3} \leq a^{2/3}\}$.

3 (☆☆☆)(立体の体積②) 球 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ と円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$ の共通部分 E の体積を求めよ.

4 (☆☆☆)(立体の体積③) 直交 2 円柱 $x^2 + y^2 \leq a^2$, $y^2 + z^2 \leq a^2$ の共通部分 D の体積を求めよ.

5 (★★☆)(立体の体積④) 次の各曲面で囲まれた立体の体積を求めよ.

(1) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) で囲まれた円柱面 $x^2 + y^2 = ax$ の内部 D .

(2) 放物面 $x^2 + y^2 = z$ と柱面 $x^2 + y^2 = 2z$ で囲まれた部分 E .

(3) 曲面 $z^2 = 4ax$ ($a > 0$) と柱面 $x^2 + y^2 = ax$ で囲まれた部分 F .

6 (★★☆)(回転トーラスの体積) 次の 3 次元空間内の立体 T の体積を求めよ.

$$T := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{4} \left(\sqrt{x^2 + y^2} - 3 \right)^2 + z^2 \leq 1 \right\}.$$