§14 ガンマ関数・ベータ関数　演習問題１　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(近似増加列)

面積確定な有界閉集合の列 $\{D_n\}$ が領域 D の**近似増加列**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう：

①: $D_1 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots \subset D$.

②: $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$.

③: D に含まれる任意の有界閉集合 K に対して，$K \subset D_n$ を満たす番号 n が存在する.

以下，$D := \{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とし，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$D_n := \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\}$$

とおく．D_n は D の近似増加列であることを示せ.

解 すべての $n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$D_n = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\} \subset \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq n+1,\ 0 \leqq y \leqq n+1\} = D_{n+1}$$

が成り立つから，①は満たされる.

$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subset D$ を示そう．$(x, y) \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ とすると，ある番号 n が存在して $(x, y) \in D_n$．明らかに $D_n \subset D$ であるから $(x, y) \in D$．よって $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \subset D$.

次に，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \supset D$ を示そう．そのために，$\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \not\supset D$ と仮定して矛盾を導く．仮定より $(x, y) \in D$ かつ $(x, y) \notin \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ となる点 (x, y) が存在する．このとき，

$$(x, y) \in D \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \overset{\text{de Morgan}}{\Longleftrightarrow} (x, y) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} (D \setminus D_n) \iff \text{すべての } n \text{ に対し } (x, y) \in D \setminus D_n \cdots ①.$$

$n \to \infty$ のとき $D_n \to D$ であるから*，$D \setminus D_n \to \varnothing$．よって，①で $n \to \infty$ とすると $(x, y) \in \varnothing$ となるがこれは矛盾する．したがって，背理法により $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \supset D$ が成り立つ．以上より，② も満たされる.

K を D 内の任意の有界閉集合とする．このとき，原点を中心とし，K に依存する半径 $r(K)$ の K を含む球 $B_{r(K)}$ がとれる：$K \subset B_{r(K)}$．$r(K)$ にもっとも近い自然数を $n(K) := [r(K)]$† とすると，$D_{n(K)}$ は K を含む．したがって③が満たされた.

以上より，$D_n = \{(x, y) : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\}$ は $D = \{(x, y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ の近似増加列である. ∎

---

* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} D_n = D$ は直感的には明らかだが，正確には次の意味で定義される：①: 任意の $(x, y) \in D$ に対して，ある番号 n_0 が存在して $n \geqq n_0$ ならば $(x, y) \in D_n$ が成り立ち，②: 任意の $(z, w) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ に対してある番号 n' が存在して，$n \geqq n'$ ならば $(z, w) \notin D_n$ が成り立つことを意味する.

† $[x]$ は Gauss 記号

2 (★★☆)(近似増加列上の定符号連続関数の重積分の収束)

$f(x,y)$ を D 上連続で $f(x,y) \geqq 0$ (または $f(x,y) \leqq 0$) とする．D のある近似増加列 $\{D_n\}$ に対して極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

が存在すれば，D の任意の近似増加列 $\{E_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

が成り立つことを示せ．

解 D 上 $f(x,y) \geqq 0$ の場合のみ証明する．$f(x,y) \leqq 0$ の場合は $-f(x,y) \geqq 0$ とみて前者の場合に帰着させて証明すればよい．

$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{E_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ はどちらも単調増大列であり $f(x,y) \geqq 0$ on D であるから，重積分の列

$$\left\{\iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy\right\}_{n\in\mathbb{N}}, \quad \left\{\iint_{E_i} f(x,y)\,dxdy\right\}_{i\in\mathbb{N}}$$

はどちらも単調増加．次に，任意の $i \in \mathbb{N}$ に対して $E_i \subset D$ は有界閉集合であるから，近似増加列の条件③により，i に依存するある番号 $n(i)$ が存在して $E_i \subset D_{n(i)} \subset D_n$ がすべての $n \geqq n(i)$ で成り立つ．ゆえに，

$$\iint_{E_i} f(x,y)\,dxdy \leqq \iint_{D_{n(i)}} f(x,y)\,dxdy \leqq \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy < \infty. \quad \cdots ⊛$$

よって，$\left\{\iint_{E_i} f(x,y)\,dxdy\right\}_{i\in\mathbb{N}}$ は上に有界な単調増加列．ゆえに，極限 $\lim_{i\to\infty} \iint_{E_i} f(x,y)\,dxdy$ が存在し，⊛で $i \to \infty$ の極限に移行すると

$$\lim_{i\to\infty} \iint_{E_i} f(x,y)\,dxdy \leqq \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy$$

を得る．同様に，$\{E_i\}$ と $\{D_n\}$ の役割を入れ替えることにより

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\,dxdy \leqq \lim_{i\to\infty} \iint_{E_i} f(x,y)\,dxdy$$

が成り立つ．以上より所望の等式に逢着する． ∎

$\boxed{3}$ (★★★)(連続関数の重積分の絶対収束)

$f(x,y)$ は領域 D 上連続とする．$\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ が存在すれば $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ も存在することを $\boxed{2}$ の結果を用いて示せ．

解 まず，

$$f_+(x,y) := \max\{f(x,y), 0\}, \quad f_-(x,y) := \max\{-f(x,y), 0\}$$

とおくと f_+, $f_- \geqq 0$ であり $f_\pm$ は連続関数．また，

$$\begin{aligned} &f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y), \\ &|f(x,y)| = f_+(x,y) + f_-(x,y) \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqq f_+(x,y),\ f_-(x,y) \leqq |f(x,y)|. \end{aligned}$$

$\{D_n\}$ を D の近似増加列とすると，仮定より

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} |f(x,y)|\,dxdy = \iint_D |f(x,y)|\,dxdy =: I$$

かつ，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\iint_{D_n} f_\pm(x,y)\,dxdy \leqq \iint_{D_n} |f(x,y)|\,dxdy \leqq I.$$

よって，$\displaystyle\left\{\iint_{D_n} f_\pm(x,y)\,dxdy\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ は上に有界な単調増加列でだから極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_\pm(x,y)\,dxdy$ は存在する．さらに，非積分関数 $f_\pm(x,y)$ は非負であるから，$\boxed{2}$ の結果を用いると，極限は近似増加列 $\{D_n\}$ の取り方によらず一意に定まる．ゆえに，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_\pm(x,y)\,dxdy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \left(f_+(x,y) - f_-(x,y)\right)\,dxdy \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\iint_{D_n} f_+(x,y)\,dxdy - \iint_{D_n} f_-(x,y)\,dxdy\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_+(x,y)\,dxdy - \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_-(x,y)\,dxdy \end{aligned}$$

となるから，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} f_\pm(x,y)\,dxdy$ は存在して，近似増加列 $\{D_n\}$ の取り方によらずに一意に定まる． ∎

4 (★★☆)(広義重積分)

次の広義重積分を適当な近似増加列を用いて求めよ：

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad D := \{(x,y) : 0 < x \leqq y \leqq 1\}.$$

解 非積分関数は非負であるから，D の近似増加列 $\{D_n\}$ の取り方によらず極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は存在する．$D_n := \left\{(x,y) : \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x\right\}$ とおくと，$\{D_n\}$ は D の近似増加列である．

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_n := \iint_{D_n} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy \right) dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[\log(y+\sqrt{x^2+y^2}) \right]_{y=0}^{x} dx \\
&= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\log(1+\sqrt{2})x - \log x \right) dx \\
&= \log(1+\sqrt{2}) \int_{\frac{1}{n}}^{1} dx = \log(1+\sqrt{2})\left(1-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \log(1+\sqrt{2}).
\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}_n = \mathbf{log\,(1+\sqrt{2})}.$ ∎

5 (★★☆)(広義重積分の収束)

次の広義重積分が収束するための α に関する必要十分条件を求めよ：

(1) $\displaystyle\iint_B (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dxdy, \quad B := \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1\right\}.$

(2) $\displaystyle\iint_\Omega (x-y)^{-\alpha}\, dxdy, \quad \Omega := \{(x,y) : 0 \leqq y < x \leqq 1\}.$

解 (1) B の近似増加列として $B_n := \left\{(x,y) : \frac{1}{n^2} \leqq x^2+y^2 \leqq 1\right\}$, $n = 1, 2, \ldots$ をとって，

$$\mathbf{I}_n(\alpha) := \iint_{B_n} (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dxdy$$

とおく．極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ によって

$$\mathbf{I}_n(\alpha) = \int_0^{2\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{1} (r^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \cdot r\, dr d\theta = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{1-\alpha}\, dr.$$

・$\alpha = 2$ のとき：$\mathbf{I}_n(2) = 2\pi \left[\log r\right]_{r=\frac{1}{n}}^{1} = -2\pi \log\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$

・$\alpha \neq 2$ のとき：

$$\mathbf{I}_n(\alpha) = 2\pi \left[\frac{1}{2-\alpha} r^{2-\alpha}\right]_{r=\frac{1}{n}}^{1} = \frac{2\pi}{2-\alpha}\left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha}\right]$$

$$\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} -\infty & \text{if } \alpha > 2 \\ \frac{2\pi}{2-\alpha} & \text{if } \alpha < 2 \end{cases}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \mathbf{I}_n = \iint_B (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dxdy$ が収束する必要十分条件は $\boldsymbol{\alpha < 2}$.

(2)　Ω の近似増加列として $\Omega_n := \left\{(x,y) : \frac{1}{n} \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq x - \frac{1}{n}\right\},\ n = 1, 2, \ldots$ をとって，

$$\mathbf{II}_n(\alpha) := \iint_{\Omega_n} (x-y)^{-\alpha}\, dxdy$$

とおく．

・$\alpha = 1$ のとき：

$$\mathbf{II}_n(1) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{dy}{x-y} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \Big[-\log(x-y) \Big]_{y=0}^{x-\frac{1}{n}} dx$$

$$= \int_{\frac{1}{n}}^{1} \log x\, dx + \frac{1}{n}\log\frac{1}{n} - \log\frac{1}{n}.$$

ここで，右辺第 1 項と第 2 項に関して

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \log x\, dx + \frac{1}{n}\log\frac{1}{n} = \left[x\log x - x\right]_{x=\frac{1}{n}}^{1} + \frac{1}{n}\log\frac{1}{n}$$

$$= -1 + \frac{1}{n}$$

であるから，

$$\mathbf{II}_n(1) = -1 + \frac{1}{n} - \log\frac{1}{n} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

・$\alpha \neq 1$ のとき：

$$\mathbf{II}_n(\alpha) = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left(\int_0^{x-\frac{1}{n}} (x-y)^{-\alpha}\, dy \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \left[-\frac{1}{1-\alpha}(x-y)^{1-\alpha} \right]_{y=0}^{x} dx$$

$$= \frac{1}{1-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{1-\alpha}\,dx - \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

ここでもし，$\alpha = 2$ ならば

$$\mathbf{II}_n(2) = -\left[\log x\right]_{x=\frac{1}{n}}^{1} + n\left(1-\frac{1}{n}\right) = \log\frac{1}{n} + n - 1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

となるから，$\alpha \neq 2$．以下，$\alpha \neq 1, 2$ のもとで，

$$\frac{1}{1-\alpha}\int_{\frac{1}{n}}^{1} x^{1-\alpha}\,dx = \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha}\right]$$

i.e.,

$$\begin{aligned}
\mathbf{II}_n(\alpha) &= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)}\left[1-\left(\frac{1}{n}\right)^{2-\alpha}\right] - \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\left(1-\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} + \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\alpha}\left[-\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{(2-\alpha)n}\right] \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty & \text{if } \alpha > 1,\ \alpha \neq 2 \\ \frac{1}{(1-\alpha)(2-\alpha)} & \text{if } \alpha < 1 \end{cases}.
\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\mathbf{II}_n(\alpha) = \iint_{\Omega}(x-y)^{-\alpha}\,dxdy$ が収束するための必要十分条件は $\boldsymbol{\alpha < 1}$. ∎

【記号】 以下の問いにおいて，$s > 0,\ t > 0$ に対して定義される広義積分

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x}x^{s-1}\,dx, \qquad B(s,t) := \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

をそれぞれ**ガンマ関数**，**ベータ関数**という．

6 (★★★)(ガンマ関数とベータ関数の関係)

以下の問いに答えよ．

(1) $\Omega := \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とおく．Ω の近似増加列の 1 つ

$$\Omega_n := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\}$$

を持ち出すことにより，等式

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \iint_{\Omega} e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy$$

が成り立つことを示せ．

(2) Ω の近似増加列のもう 1 つ

$$\widetilde{\Omega_n} := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n-x\}$$

を持ち出し，変数変換 $x = uv,\ y = u - uv$ を考えることにより，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ とベータ関数 $B(s,t)$ の間に等式

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

が成り立つことを示せ．

解 (1) Ω の近似増加列として $\Omega_n := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\}$ をとって，

$$\begin{aligned}
\Gamma(s)\Gamma(t) &= \left(\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx\right)\left(\int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x}x^{s-1}\,dx\right)\left(\int_0^n e^{-x}x^{t-1}\,dx\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\iint_{\Omega_n} e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy
\end{aligned}$$

であり，非積分関数 $e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}$ は Ω 上非負であるから，

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \iint_{\Omega} e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy.$$

(2) 一方，Ω の別の近似増加列として $\widetilde{\Omega_n} := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n-x\}$ をとると

$$\iint_{\Omega} e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{\widetilde{\Omega_n}} e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy \quad \cdots ①.$$

①右辺の $\widetilde{\Omega_n}$ 上の重積分において変数変換 $x = uv,\ y = u - uv$ を考えると，Jacobian は

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{pmatrix} = -u$$

であり，この変換によって $\widetilde{\Omega_n}$ は $\{(u,v) : 0 \leqq u \leqq n,\ 0 \leqq v \leqq 1\}$ と境界を除いて 1 対 1 に対応するので，

$$\begin{aligned}
\iint_{\widetilde{\Omega_n}} e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy &= \iint_{\{0\leqq u\leqq n,\ 0\leqq v\leqq 1\}} e^{-u}(uv)^{s-1}\left[u(1-v)\right]^{t-1}|-u|\,dudv \\
&= \iint_{\{0\leqq u\leqq n,\ 0\leqq v\leqq 1\}} e^{-u}u^{s+t-1}v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,dudv
\end{aligned}$$

$$= \left(\int_0^n e^{-u} u^{s+t-1}\, du \right) \left(\int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}\, dv \right)$$

したがって，①より

$$\iint_\Omega e^{-(x+y)} x^{s-1} y^{t-1}\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^n e^{-u} u^{s+t-1}\, du \right) \left(\int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}\, dv \right)$$

$$= \Gamma(s+t)B(s,t)$$

が得られる．これと (1) を合わせて所望の等式

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \Gamma(s+t)B(s,t)$$

に逢着する． ∎

7 (★★★)(ガンマ関数での表示)

次の広義重積分をガンマ関数で表せ．ただし，$s,\, t > 0$ とする．

$$\iint_D x^{s-1} y^{t-1}\, dxdy, \quad D := \left\{ (x,y) : x^2 + y^2 \leqq 1,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}.$$

解 D の近似増加列 $D_n := \left\{ (x,y) : \frac{1}{n^2} \leqq x^2 + y^2 \leqq 1\, x \geqq 0,\ y \geqq 0 \right\}$ をとって，

$$\mathbf{I}_n := \iint_{D_n} x^{s-1} y^{t-1}\, dxdy$$

とおく．極座標変換 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ によって D_n は $\left\{ (r,\theta) : \frac{1}{n} \leqq r \leqq 1,\ 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} \right\}$ に境界を除いて 1 対 1 に写されるので，

$$\mathbf{I}_n = \iint_{\{\frac{1}{n} \leqq r \leqq 1,\, 0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\}} (r\cos\theta)^{s-1} (r\sin\theta)^{t-1} \cdot r\, drd\theta$$

$$= \left(\int_{\frac{1}{n}}^1 r^{s+t-1}\, dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{s-1}\theta \sin^{t-1}\theta\, d\theta \right)$$

$$= \left[\frac{r^{s+t}}{s+t} \right]_{r=\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot\frac{s}{2}-1}\theta \sin^{2\cdot\frac{t}{2}-1}\theta\, d\theta \right) \quad \cdots ①$$

三角関数積分項において，$x = \sin^2\theta$ の変数変換を行うと，$\cos^2\theta = 1 - x$，$2\sin\theta\cos\theta\, d\theta = dx$ であり，$\theta : 0 \to \frac{\pi}{2}$ のとき $x : 0 \to 1$ であるから，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\cdot\frac{s}{2}-1}\theta \sin^{2\cdot\frac{t}{2}-1}\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2(\frac{s}{2}-1)}\theta \sin^{2(\frac{t}{2}-1)}\theta\ \sin\theta\cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^1 x^{\frac{s}{2}-1}(1-x)^{\frac{t}{2}-1} \cdot \frac{1}{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\tfrac{s}{2}, \tfrac{t}{2}\right).$$

ゆえに，①および $\boxed{\mathbf{6}}$ を用いて

$$\iint_D x^{s-1} y^{t-1}\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \mathbf{I}_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1-\left(\frac{1}{n}\right)^{s+t}}{s+t} \right) \frac{1}{2} B\left(\tfrac{s}{2}, \tfrac{t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4\left(\frac{s}{2}+\frac{t}{2}\right)} \frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{t}{2})}{\Gamma(\frac{s}{2}+\frac{t}{2})}$$

$$= \boldsymbol{\frac{\Gamma(\frac{s}{2})\Gamma(\frac{t}{2})}{4\Gamma(\frac{s+t}{2}+1)}}.$$

ただし，最後の行において $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ であることを用いた.[‡] ∎

[‡] **微分積分 I, §13 広義積分 演習問題 2 $\boxed{5}$ −(2) 参照のこと.**