§14 ガンマ関数・ベータ関数　演習問題 1　解答

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★★☆)(近似増加列)

面積確定な有界閉集合の列 $\{D_n\}$ が領域 D の**近似増加列**であるとは，次の 3 条件を満たすことをいう：

①: $D_1 \subset \cdots \subset D_n \subset \cdots \subset D$.

②: $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$.

③: D に含まれる任意の有界閉集合 K に対して，$K \subset D_n$ を満たす番号 n が存在する.

以下，$D := \{(x,y) : x \geqq 0,\ y \geqq 0\}$ とし，$n = 1, 2, \ldots$ に対して

$$D_n := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq n,\ 0 \leqq y \leqq n\}$$

とおく．D_n は D の近似増加列であることを示せ.

2 (★★☆)(近似増加列上の定符号連続関数の重積分の収束)

$f(x,y)$ を D 上連続で $f(x,y) \geqq 0$ (または $f(x,y) \leqq 0$) とする．D のある近似増加列 $\{D_n\}$ に対して極限

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\, dxdy$$

が存在すれば，D の任意の近似増加列 $\{E_n\}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\, dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x,y)\, dxdy$$

が成り立つことを示せ.

3 (★★★)(連続関数の重積分の絶対収束)

$f(x,y)$ は領域 D 上連続とする．$\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\, dxdy$ が存在すれば $\displaystyle\iint_D f(x,y)\, dxdy$ も存在することを $\boxed{2}$ の結果を用いて示せ.

4 (★★☆)(広義重積分)

次の広義重積分を適当な近似増加列を用いて求めよ：

$$\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad D := \{(x,y) : 0 < x \leqq y \leqq 1\}.$$

5 (★★☆)(**広義重積分の収束**)

次の広義重積分が収束するための α に関する必要十分条件を求めよ：

(1) $\displaystyle\iint_B (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\,dxdy,\quad B := \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1\right\}.$

(2) $\displaystyle\iint_\Omega (x-y)^{-\alpha}\,dxdy,\quad \Omega := \{(x,y) : 0 \leqq y < x \leqq 1\}.$

【記号】 以下の問いにおいて，$s>0,\, t>0$ に対して定義される広義積分

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}\,dx,\qquad B(s,t) := \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}\,dx$$

をそれぞれ**ガンマ関数**，**ベータ関数**という．

6 (★★★)(**ガンマ関数とベータ関数の関係**)

以下の問いに答えよ．

(1) $\Omega := \{(x,y) : x \geqq 0,\, y \geqq 0\}$ とおく．Ω の近似増加列の 1 つ

$$\Omega_n := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq n,\, 0 \leqq y \leqq n\}$$

を持ち出すことにより，等式

$$\Gamma(s)\Gamma(t) = \iint_\Omega e^{-(x+y)}x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy$$

が成り立つことを示せ．

(2) Ω の近似増加列のもう 1 つ

$$\widetilde{\Omega_n} := \{(x,y) : 0 \leqq x \leqq n,\, 0 \leqq y \leqq n-x\}$$

を持ち出し，変数変換 $x = uv,\ y = u - uv$ を考えることにより，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ とベータ関数 $B(s,t)$ の間に等式

$$B(s,t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$$

が成り立つことを示せ．

7 (★★★)(**ガンマ関数での表示**)

次の広義重積分をガンマ関数で表せ．ただし，$s,\, t>0$ とする．

$$\iint_D x^{s-1}y^{t-1}\,dxdy,\quad D := \left\{(x,y) : x^2+y^2 \leqq 1,\, x \geqq 0,\, y \geqq 0\right\}.$$