§2 偏微分の定義と基本性質　演習問題 1　解答

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

1 (★☆☆)(偏微分の定義)

次の空欄に適切な数式を入れよ．

$f(x,y)$ を 2 変数関数とする．$f(x,y)$ が点 (a,b) で x **に関して偏微分可能**であるとは，極限値

$$\boxed{\text{（あ）}}$$

が存在するときをいい，記号で $\boxed{\text{（い）}}$ または $f_x(a,b)$ と書く．

同様に，$f(x,y)$ が点 (a,b) で y **に関して偏微分可能**であるとは，極限値

$$\boxed{\text{（う）}}$$

が存在するときをいい，記号で $\boxed{\text{（え）}}$ または $f_y(a,b)$ と書く．

解　順に以下のようになる：

（あ） $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h}$

（い） $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$

（う） $\displaystyle \lim_{k \to 0} \frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$

（え） $\displaystyle \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ ∎

2 (★☆☆)(偏微分の具体的計算)

次の関数を x, y それぞれの場合について偏微分せよ．

(1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$　　(2) $z = \sqrt{x^2+y^2}$

(3) $z = e^{ax}\sin(by)$　　(4) $z = \log(x^2+y^2)$　$((x,y) \neq (0,0))$

(5) $z = x^y$　$(x > 0)$　　(6) $z = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

解 実際に計算する際は，偏微分する変数以外の変数は定数とみなす．

(1) $z_x = 3x^2 - 3y, \quad z_y = 3y^2 - 3x$

(2) $\displaystyle z_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad z_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(3) $\boldsymbol{z_x = ae^{ax}\sin(by), \quad z_y = be^{ax}\cos(by)}$

(4) $\boldsymbol{z_x = \dfrac{2x}{x^2+y^2}, \quad z_y = \dfrac{2y}{x^2+y^2}}$

(5) $z = x^y$ の両辺自然対数をとって，

$$\log z = y \log x \qquad \cdots\cdots ①$$

①の両辺を x で偏微分して，

$$\frac{z_x}{z} = y \cdot \frac{1}{x} \qquad \therefore\ z_x = \frac{y}{z}z = \boldsymbol{\frac{y}{x}x^y}$$

今度は①の両辺を y で偏微分して，

$$\frac{z_y}{z} = \log x \qquad \therefore\ z_x = z\log x = \boldsymbol{x^y \log x}$$

(6) $(x,y) \neq (0,0)$ において

$$z_x = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)_x}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \boldsymbol{\frac{y}{x^2+y^2}}$$

$$z_y = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)_y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \boldsymbol{-\frac{x}{x^2+y^2}}$$

■

3 (★★☆)(偏微分可能 ⇒ 連続？)

2 変数関数 $f(x,y)$ を次で定める：

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \cdots \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \cdots \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1) f は原点で x についても y についても偏微分可能であって，$f_x(0,0) = f_y(0,0)$ であることを示せ．

(2) f は原点で連続でないことを示せ．

解 (1) f は x と y について対称なので，x についての主張のみを示せば十分．このとき，

$$\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \frac{1}{h} \cdot \frac{h \cdot 0}{h^2+0^2} = 0$$

だから，極限 $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}$ は存在する．したがって，f は $x=0$ で偏微分可能であって

$$\boldsymbol{f_x(0,0) = 0.}$$

(2) $f(x,y)$ の定義域内の点 (x,y) が直線 $y=x$ に沿って原点に近づくとすると，

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \frac{1}{2}.$$

よって，$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ となり得ない．ゆえに，f は原点で連続でない． ■

Check 1 変数関数の場合は「微分可能 ⇒ 連続」であったが，2 変数の場合はこの例が示すように一般には「偏微分可能 ⇒ 連続」とならない．偏微分より強い条件である全微分可能ならば連続になる．詳細は 微積分 II 演習問題「§3 全微分と合成関数の微分法　演習問題 1, 2」を参照のこと．

4 (★★☆)(平均値の定理の応用)

2 変数関数 $f(x,y)$ について，次の問いに答えよ．

(1) $f_x(x,y)=0$ および $f_y(x,y)=0$ ならば $f(x,y)$ は定数であることを示せ．

(2) $f_x(x,y)=\sin x$，$f_y(x,y)=\cos y$ であるとき，$f(x,y)$ を求めよ．

解 (1) まず y を固定して x の関数とみる．すべての実数 x に対して，平均値の定理より

$$f(x,y)-f(0,y) = x f_x(c,y)$$

となる実数 c が 0 と x の間に存在する．よって，$f_x(x,y)=0$ より $f(x,y)=f(0,y)$ となり，$f(x,y)$ は x によらない y の関数である．ゆえに $f(x,y)=g(y)$ とおく．$f_y(x,y)=g'(y)$ であり $f_y(x,y)=0$ より $g'(y)=0$．したがって，$g(y)$ は定数．以上まとめて，$f(x,y)$ は定数である．

(2) まず $f_x(x,y)=\sin x$ より

$$f(x,y) = \int \sin x\,dx = -\cos x + g(y)$$

と書ける．ただし，$g(y)$ は y のみの関数．両辺を y で偏微分して

$$\cos y = f_y(x,y) = g'(y)$$

ゆえに，両辺を y で積分して

$$g(y) = \int \cos y\,dy = \sin y + c \quad (c:\ \text{任意定数}).$$

したがって，$\boldsymbol{f(x,y) = -\cos x + \sin y + c}$. ■