

§2 偏微分の定義と基本性質 演習問題 1

📎 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★★☆)(偏微分の定義)

次の空欄に適切な数式を入れよ.

$f(x, y)$ を 2 変数関数とする. $f(x, y)$ が点 (a, b) で x に関して偏微分可能であるとは, 極限值

(あ)

が存在するときをいい, 記号で (い) または $f_x(a, b)$ と書く.

同様に, $f(x, y)$ が点 (a, b) で y に関して偏微分可能であるとは, 極限值

(う)

が存在するときをいい, 記号で (え) または $f_y(a, b)$ と書く.

2 (★★☆)(偏微分の具体的計算)

次の関数を x, y それぞれの場合について偏微分せよ.

(1) $z = x^3 + y^3 - 3xy$

(2) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

(3) $z = e^{ax} \sin(by)$

(4) $z = \log(x^2 + y^2) \quad ((x, y) \neq (0, 0))$

(5) $z = x^y \quad (x > 0)$

(6) $z = \arctan\left(\frac{x}{y}\right)$

3 (★★☆)(偏微分可能 \Rightarrow 連続?)

2 変数関数 $f(x, y)$ を次で定める:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \cdots (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \cdots (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(1) f は原点で x についても y についても偏微分可能であって, $f_x(0, 0) = f_y(0, 0)$ であることを示せ.

(2) f は原点で連続でないことを示せ.

4 (★★☆)(平均値の定理の応用)

2 変数関数 $f(x, y)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $f_x(x, y) = 0$ および $f_y(x, y) = 0$ ならば $f(x, y)$ は定数であることを示せ.

(2) $f_x(x, y) = \sin x$, $f_y(x, y) = \cos y$ であるとき, $f(x, y)$ を求めよ.