

全微分と合成関数の微分法 演習問題 2

問 1. 次の極限が存在するかどうか調べ、もし存在するならばその値を求めよ.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

(Hint: x 軸に沿って (x, y) を $(0, 0)$ へ近づけた場合と直線 $y = x$ に沿って (x, y) を $(0, 0)$ へ近づけた場合とを比較してみよ.)

問 2. 関数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}.$$

について、以下の問に答えよ.

- (i) 関数 $f(x, y)$ が $(0, 0)$ において連続であるかどうか調べよ. ただし、必要ならば問 1 の結果を用いてもよい.
- (ii) 関数 $f(x, y)$ が $(0, 0)$ で偏微分可能かどうか調べよ.
(Hint: “偏微分可能” であることの定義を確認してみよ.)

問 3. 2 変数関数 $z = x^2 - y$ と 1 変数関数 $x = e^t, y = t$ について以下の問に答えよ. これらの関数の (全) 微分可能性は認めてよい.

- (i) 上記関数を合成して、 z を t の関数として表せ.
- (ii) (i) の結果を直接微分して、 $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.
- (iii) 合成関数の微分*1を用いて、 $\frac{dz}{dt}$ を求めよ.

*1 ここでの “合成関数の微分” とは、 z の偏導関数と x, y の導関数を用いることを指す.