§7 陰関数の定理　演習問題 1

✐ 問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　　【標準】★★☆　　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★☆☆)(**陰関数の微分計算**)

曲線 $C : f(x, y) = 0$ 上の点 P の近傍において，次の方程式 $f(x, y) = 0$ は陰関数 $y = \varphi(x)$ を持つことを示し，導関数 $\varphi'(x)$ および P における微分係数 φ' を求めよ：

(1) $f(x, y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - x + y - 2, \quad \mathrm{P}\,(0, 1).$

(2) $f(x, y) = \cos y + 2x\cos(xy) + 2y\cos x - \pi, \quad \mathrm{P}\,(\pi, 0).$

$\boxed{2}$ (★☆☆)(**1 変数関数の極値判定条件**)

関数 $f(x)$ は C^2 級（すなわち第 2 次導関数 $f''(x)$ が存在して連続）であり，$f'(a) = 0$ をみたしているとする．このとき，以下を示せ．

(1) $f''(a) > 0$ ならば $f(a)$ は極小値.

(2) $f''(a) < 0$ ならば $f(a)$ は極大値.

$\boxed{3}$ (★★☆)(**陰関数の極値**)

次の方程式で与えられる陰関数 $y = \varphi(x)$ の極値を求めよ．

(1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 1 = 0$

(2) $f(x, y) = x^2 - xy - y^2 + 2 = 0$

$\boxed{4}$ (★★☆)(**陰関数の第 2 次導関数**)

2 変数関数 $f(x, y)$ は C^2 級関数（すなわち 2 階までのすべての偏導関数が存在して連続）で，$f(a, b) = 0$ かつ $f_y(a, b) \neq 0$ とする．このとき，$x = a$ の近くで定義された 2 回微分可能な陰関数 $y = \varphi(x)$ が存在して，

$$\varphi''(x) = -\frac{f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + f_x^2 f_{yy}}{f_y^3}$$

が成り立つことを示せ．ここで右辺に現れるすべての偏導関数は $(x, \varphi(x))$ における偏導関数である．