

§8 条件付き極値問題と最大・最小問題 演習問題 2

📎 問題の難易度の目安 【基礎】 ★☆☆ 【標準】 ★★☆☆ 【発展】 ★★★

1 (★★☆)(2次形式の条件付き極値問題) 制約条件 $x^2 + y^2 = 1$ のもとで 2次形式

$$Q(x, y) := ax^2 + 2bxy + cy^2$$

の最大値・最小値を Lagrange の未定乗数法を用いて求めよ. ここに a, b, c は定数で $b \neq 0$ とする.

2 (★★☆)(点と直線の最短距離) 定点 (x_0, y_0) から直線 $ax + by + c = 0$ までの最短距離 d が

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

で与えられることを示せ. ここに a, b, c は定数で $(a, b) \neq (0, 0)$ とする.

3 (★★★)(2つの制約条件下での極値問題) 制約条件

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4, \quad (x - 1)^2 + y^2 = 1$$

のもとでの関数

$$f(x, y, z) = x^2 + (y + 1)^2 + z^2$$

の最大値・最小値を求めよ.