

§8 条件付き極値問題と最大・最小問題 演習問題 3

📎 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★★☆)(条件付き最大・最小問題①)

条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$ のもとで、関数 $f(x, y) = (x + y)^2$ の最大値・最小値を求めよ。

2 (★★☆)(条件付き最大・最小問題②)

条件 $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ のもとで、関数 $f(x, y) = 5x^2 + 2\sqrt{3}xy + 7y^2$ の最大値・最小値を求めよ。

3 (★★★)(Lagrange 未定乗数法の応用)

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ は開集合、 $f(x, y), g(x, y)$ はともに Ω 上の C^2 級関数とする。点 $(a, b) \in \Omega$ において $f(x, y), g(x, y)$ は 3 条件

- (1) $g(a, b) = 0$
- (2) $\nabla g(a, b) \neq \top(0, 0)$
- (3) ある実数 λ に対して $\nabla f(a, b) - \lambda \nabla g(a, b) = \top(0, 0)$

をみたしているとする。

$$\Delta := \det \begin{pmatrix} 0 & g_x(a, b) & g_y(a, b) \\ g_x(a, b) & f_{xx}(a, b) - \lambda g_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) - \lambda g_{xy}(a, b) \\ g_y(a, b) & f_{xy}(a, b) - \lambda g_{xy}(a, b) & f_{yy}(a, b) - \lambda g_{yy}(a, b) \end{pmatrix}$$

とおく。このとき、 $\Delta < 0$ ならば $f(a, b)$ は極小値、 $\Delta > 0$ ならば $f(a, b)$ は極大値であることを示せ。