§11 行列式の計算　演習問題２　解答

✐ 問題の難易度の目安【易】★☆☆　　【基礎】★★☆　【標準】★★★

1 (★★★)(行列式に関する不等式)

$A,\ B$ を $n\times n$ 実対称な正定値行列とする．このとき，

$$\det(A+B)^{1/n} \geqslant \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$$

が成り立つことを示せ．また，等号成立は $A=\lambda B\ (\lambda>0)$ のときに限ることを示せ．

解 $A,\ B$ は実対称な正定値行列であるから，同時対角化可能な可逆行列 R が存在する：

$$A = R^{\top}\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}}_{=C} R, \qquad B = R^{\top}\underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \beta_n \end{pmatrix}}_{=D} R \quad \cdots ①.$$

ここに，$R^{\top}$ は R の転置であり，$\alpha_i,\ \beta_i>0\quad \forall i=1,\dots,n$ である．相加相乗平均の不等式から，

$$\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\alpha_i+\beta_i}\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\alpha_i+\beta_i}\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\alpha_i+\beta_i} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta_i}{\alpha_i+\beta_i} = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n}\beta_i\right)^{1/n} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)\right)^{1/n} \quad \cdots ②.$$

さらに，等号成立は $\alpha_i=\lambda\beta_i\ (\lambda>0)\quad \forall i=1,\dots,n$ であることが分かる．①,②および，行列式の積の法則を用れば

$$\begin{aligned}
\det(A+B)^{1/n} &\overset{①}{=} \det\left(R^{\top}(C+D)R\right)^{1/n} \\
&= \det(R^{\top})^{1/n}\left(\det(C+D)\right)^{1/n}\det(R)^{1/n} \\
&= \det(R^{\top})^{1/n}\left(\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i+\beta_i)\right)^{1/n}\det(R)^{1/n} \\
&\overset{②}{\geqslant} \det(R^{\top})^{1/n}\left[\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n}\beta_i\right)^{1/n}\right]\det(R)^{1/n} \\
&= \det(R^{\top})^{1/n}\left[\det(C)^{1/n}+\det(D)^{1/n}\right]\det(R)^{1/n} \\
&= \left(\det\left(R^{\top}CR\right)\right)^{1/n} + \left(\det\left(R^{\top}DR\right)\right)^{1/n} \\
&= \det(A)^{1/n}+\det(B)^{1/n}
\end{aligned}$$

となり，所望の式に逢着する． ∎

2 (★★★)(行列式に関する微分公式)

A, B は $n \times n$ 実行列で，A は可逆とする．このとき

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \det\left(A + \varepsilon B\right)\bigg|_{\varepsilon=0} = \det(A)\mathrm{tr}\left(A^{-1}B\right)$$

が成り立つことを示せ．

解 行列式の積の法則により，

$$\det(A + \varepsilon B) = \det\left(A(I + \varepsilon A^{-1}B)\right) = \det(A)\det(I + \varepsilon A^{-1}B)$$

が成り立つ．ただし I は単位行列を表す．次に，Taylor の定理により

$$\det(I + \varepsilon A^{-1}B) = I + \varepsilon\,\mathrm{tr}\left(A^{-1}B\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

と表されるから，

$$\det(A + \varepsilon B) = \det(A)\left(I + \varepsilon\,\mathrm{tr}\left(A^{-1}B\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)\right).$$

したがって，

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon} \det\left(A + \varepsilon B\right)\bigg|_{\varepsilon=0} &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\det(A + \varepsilon B) - \det(A)}{\varepsilon} \\ &= \det(A) \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon\ \mathrm{tr}\left(A^{-1}B\right) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)}{\varepsilon} = \det(A)\mathrm{tr}\left(A^{-1}B\right)\end{aligned}$$

となり証明が完了する． ∎