

§11 行列式の計算 演習問題2

問題の難易度の目安【易】☆☆☆ 【基礎】★★☆ 【標準】★★★

1 (★★★)(行列式に関する不等式)

A, B を $n \times n$ 実対称な正定値行列とする。このとき、

$$\det(A+B)^{1/n} \geq \det(A)^{1/n} + \det(B)^{1/n}$$

が成り立つことを示せ。また、等号成立は $A = \lambda B$ ($\lambda > 0$) のときに限ることを示せ。

2 (★★★)(行列式に関する微分公式)

A, B は $n \times n$ 実行列で、 A は可逆とする。このとき

$$\left. \frac{d}{d\varepsilon} \det(A + \varepsilon B) \right|_{\varepsilon=0} = \det(A) \operatorname{tr}(A^{-1}B)$$

が成り立つことを示せ。