逆行列　問題1　解答

以下の行列 A の余因子行列 $\tilde{A}$ および逆行列 A^{-1} を求めよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = 1, \qquad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}a_{21} = -1,$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = 0, \qquad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}a_{11} = 1,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A| = 1$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = 8, \qquad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}a_{21} = -6,$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = -1, \qquad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}a_{11} = 3,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A| = 18$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{1}{18} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

(3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}a_{22} = 7, \qquad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}a_{21} = -5,$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}a_{12} = -3, \qquad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}a_{11} = 2,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A| = -1$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

(4) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = 0, \qquad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = 3,$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = 1, \qquad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} = 1,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A| = -3$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} \\ -1 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

(5) $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1} a_{22} = -1, \qquad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2} a_{21} = -2,$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1} a_{12} = -5, \qquad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2} a_{11} = 2,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A| = -12$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

(6) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2, \qquad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad \tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$
$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1, \qquad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3, \qquad \tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A| = 1$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(7) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 16, \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -4, \quad \tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = -18, \quad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 5, \quad \tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 3,$$
$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 7, \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad \tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} 16 & -18 & 7 \\ -4 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A| = 1$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} 16 & -18 & 7 \\ -4 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(8) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \tilde{a}_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \tilde{a}_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$
$$\tilde{a}_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad \tilde{a}_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4, \quad \tilde{a}_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$
$$\tilde{a}_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \tilde{a}_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \tilde{a}_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} \\ \tilde{a}_{31} & \tilde{a}_{32} & \tilde{a}_{33} \end{pmatrix}^{\top} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A| = 4$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

(9) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3&-2\\-2&3\end{vmatrix}=5,\quad \tilde{a}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-2&-2\\0&3\end{vmatrix}=6,\quad \tilde{a}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-2&3\\0&-2\end{vmatrix}=4,$$
$$\tilde{a}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-2&0\\-2&3\end{vmatrix}=6,\quad \tilde{a}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}3&0\\0&3\end{vmatrix}=9,\quad \tilde{a}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}3&-2\\0&-2\end{vmatrix}=6,$$
$$\tilde{a}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-2&0\\3&-2\end{vmatrix}=4,\quad \tilde{a}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}3&0\\-2&-2\end{vmatrix}=6,\quad \tilde{a}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}3&-2\\-2&3\end{vmatrix}=5,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{a}_{12}&\tilde{a}_{13}\\\tilde{a}_{21}&\tilde{a}_{22}&\tilde{a}_{23}\\\tilde{a}_{31}&\tilde{a}_{32}&\tilde{a}_{33}\end{pmatrix}^{\top}=\begin{pmatrix}5&6&4\\6&9&6\\4&6&5\end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A|=3$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=\begin{pmatrix}\frac{5}{3}&2&\frac{4}{3}\\2&3&2\\\frac{4}{3}&2&\frac{5}{3}\end{pmatrix}.$$

(10) $A=\begin{pmatrix}2&3&5\\5&7&11\\7&11&-13\end{pmatrix}$

[解]: 余因子を求めると,

$$\tilde{a}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}7&11\\11&-13\end{vmatrix}=-212,\quad \tilde{a}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}5&11\\7&-13\end{vmatrix}=142,\quad \tilde{a}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}5&7\\7&11\end{vmatrix}=6,$$
$$\tilde{a}_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3&5\\11&-13\end{vmatrix}=94,\quad \tilde{a}_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}2&5\\7&-13\end{vmatrix}=-61,\quad \tilde{a}_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}2&3\\7&11\end{vmatrix}=-1,$$
$$\tilde{a}_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3&5\\7&11\end{vmatrix}=-2,\quad \tilde{a}_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}2&5\\5&11\end{vmatrix}=3,\quad \tilde{a}_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}2&3\\5&7\end{vmatrix}=-1,$$

したがって, 余因子行列は $\tilde{A}=\begin{pmatrix}\tilde{a}_{11}&\tilde{a}_{12}&\tilde{a}_{13}\\\tilde{a}_{21}&\tilde{a}_{22}&\tilde{a}_{23}\\\tilde{a}_{31}&\tilde{a}_{32}&\tilde{a}_{33}\end{pmatrix}^{\top}=\begin{pmatrix}-212&94&-2\\142&-61&3\\6&-1&-1\end{pmatrix}$.

また, A の行列式は $|A|=32$ であるので, 逆行列 A^{-1} は

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}=\begin{pmatrix}-\frac{53}{8}&\frac{47}{16}&-\frac{1}{16}\\\frac{71}{16}&-\frac{61}{32}&\frac{3}{32}\\\frac{3}{16}&-\frac{1}{32}&-\frac{1}{32}\end{pmatrix}.$$