

## 基本変形と基本行列「解説」

1. (i) 1 行の  $-3$  倍は  $\begin{bmatrix} -3 & -6 \end{bmatrix}$  なのでこれを  $A$  の 2 行に足すと

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3+(-3) & 4+(-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

になる。1 行は変わらない。

- (ii) (i) と同様にして

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

- (iii) 2 行を  $-\frac{1}{2}$  倍するので

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. 行列の積の計算である。1. と同じ結果になっていることに注意しよう。左から掛ける基本行列を「行基本変形に対応する基本行列」という。

3. 問い 1. の行基本変形を順に行うと

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

問い 2. の行列を順に左から掛けると上の行列が順に得られる。

4. 基本行列は正則である。逆行列も基本行列である。基本行列  $P$  を単位行列にする行基本変形に対応する基本行列を  $Q$  とするとき、 $Q$  が  $P$  の逆行列になる。

5. 行基本変形は

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ -6 & 14 & 9 & -14 \\ 2 & -3 & -11 & -13 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行 } +1 \text{ 行} \times 6} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -9 & -20 \\ 2 & -3 & -11 & -13 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{3 \text{ 行 } +1 \text{ 行} \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & -9 & -20 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行と } 3 \text{ 行の入れ替え}} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 2 & -9 & -20 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{3 \text{ 行 } +2 \text{ 行} \times (-2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{2 \text{ 行 } +3 \text{ 行} \times 5} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \\ & \xrightarrow{1 \text{ 行 } +3 \text{ 行} \times 3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{1 \text{ 行 } +2 \text{ 行} \times 2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

のように行なった基本変形も同時に記述するとよい。ここで、「2 行  $+1$  行  $\times 6$ 」は「1 行の 6 倍を 2 行に加える」ことを意味する。行基本変形をした結果、変化する行がわかるように記述する。「(足される行) + (足すもの)」という書き方をするのが一般的である。「1 行  $\times 6 + 2$  行」とは書かない。