

基本変形と基本行列 演習問題3 解答例

この演習問題における列基本変形と基本行列とは、以下のもの*1とする。

定義 (列基本変形). 行列に対して行う次の3つの操作を**列基本変形**という。

- (C1) $c \neq 0$ なる $c \in \mathbb{R}$ を用いて, 第 i 列を c 倍する (表記: cc_i).
- (C2) $c \in \mathbb{R}$ を用いて, 第 i 列に第 j 列の c 倍を加える (表記: $c_i + cc_j$).
- (C3) 第 i 列と第 j 列を入れ替える (表記: $c_i \leftrightarrow c_j$)

行列 A にある列基本変形を行って行列 B が得られることを行基本変形と同様に $A \rightarrow B$ と表す。もしくは行った列基本変形を明記して $A \xrightarrow{cc_i} B$ などと表すこともある。

定義 (基本行列). 次の3種類の m 次正方行列を (m 次の) **基本行列**という。

- $c \neq 0$ なる $c \in \mathbb{R}$ を用いて, m 次単位行列 I_m の第 i 行を c 倍して得られる行列 (表記: $P_i(c)$).
- $c \in \mathbb{R}$ を用いて, m 次単位行列 I_m の第 i 行に第 j 行の c 倍を加えて得られる行列 (表記: $P_{ij}(c)$).
- m 次単位行列 I_m の第 i 行と第 j 行を入れ替えて得られる行列 (表記: P_{ij})

定義より,

$$I_m \xrightarrow{cr_i} P_i(c), \quad I_m \xrightarrow{r_i+cr_j} P_{ij}(c), \quad I_m \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} P_{ij}$$

が成り立つことに注意せよ。また, m 次単位行列 I_m は対角成分がすべて1, その他の成分がすべて0の行列であることを踏まえると, 基本行列 $P_i(c)$, $P_{ji}(c)$, P_{ij} は次のようにも言い換えられる。

- $P_i(c) = m$ 次単位行列 I_m の第 i **列**を c 倍して得られる行列
- $P_{ji}(c) = m$ 次単位行列 I_m の第 i **列**に第 j **列**の c 倍を加えて得られる行列
- $P_{ij} = m$ 次単位行列 I_m の第 i **列**と第 j **列**を入れ替えて得られる行列

すなわち

$$I_m \xrightarrow{cc_i} P_i(c), \quad I_m \xrightarrow{c_i+cc_j} P_{ji}(c), \quad I_m \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} P_{ij}$$

が成り立つ。もっと一般に, 列基本変形と基本行列の関係について次のことが示される。

定理 1. 行列 A に対して

$$\begin{aligned} A \xrightarrow{cc_i} B &\Leftrightarrow B = AP_i(c) \\ A \xrightarrow{c_i+cc_j} B &\Leftrightarrow B = AP_{ji}(c) \\ A \xrightarrow{c_i \leftrightarrow c_j} B &\Leftrightarrow B = AP_{ij} \end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち列基本変形をすることは対応する基本行列を右から掛けることと等しく, 基本行列を右から掛けることは対応する列基本変形を行うことと等しい。

*1 「村上正康・佐藤恒雄・野澤宗平・稲葉尚志 共著, 教養の線形代数, 培風館」で用いられている表記を参考にした。

以上を踏まえた上で以下の問に答えよ.

問題 1. 次の行列を具体的に答えよ.

(i) 2 次の $P_2(2)$.

解答. 定義より

$$P_2(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(iii) 3 次単位行列 I_3 の第 2 列と第 3 列を入れ替えて得られる基本行列 P .

解答. I_3 の第 2 列と第 3 列を入れ替えて

$$I_3 \xrightarrow{c_2 \leftrightarrow c_3} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii) どんな 3 次正方行列 A に対しても, AP が A の第 1 列に第 3 列の (-1) 倍を加えた行列となる行列 P .

解答. 定理 1 より, P は 3 次の $P_{31}(-1)$ だから

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

問題 2. 次の列基本変形 $A \rightarrow B$ に対して, B を A に右から基本行列を掛けた形で表わせ (例えば

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

に対しては,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

というように答えよ).

(i)

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

解答.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)c_1} \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix}$$

であるから

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -6 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii)

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

解答.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

とわかるから,

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(iii)

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

解答.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{c_1 + 1 \cdot c_4} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

とわかるから

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意 . A が $m \times n$ 行列のとき, ある列基本変形 C を行って

$$A \xrightarrow{C} B$$

となったとき, この列基本変形 C に対応する基本行列, すなわち $B = AP$ をみたす基本行列 P は定理 1 より

$$I_n \xrightarrow{C} P$$

で求められる. すなわち, $A \xrightarrow{C} B$ に対して, n 次単位行列 I_n に同じ列基本変形を行って得られる基本行列を P とすると, $B = AP$ が成り立つ.