# 行列式の定義

**1** 行列式の定義の仕方は何通りかあるが，ここでは $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行列式を

$$(\sharp) \qquad |A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

で定義する。

(1) $S_n$ は $n$ 次対称群を表している。$S_n$ について説明せよ。

(2) $\sigma \in S_n$ に対して $\mathrm{sgn}(\sigma)$ はその符号を表している。$\mathrm{sgn}(\sigma)$ について説明せよ。

(3)
$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$
を示せ。

**2** 行列式の定義 $(\sharp)$ を用いて次の行列の行列式を求めよ。

(1) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} a & 0 & b \\ c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$

(4) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

(5) $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ c & 0 & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix}$

(6) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & d & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $\begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ d & 0 & 0 & e \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g & 0 \end{pmatrix}$

(8) $\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & e & f & g \\ 0 & 0 & h & i \\ 0 & 0 & 0 & j \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ 行列式の定義 ($\sharp$) を用いて以下の問に答えよ。

(1) $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の成分 $a_{ij}$ がすべて整数ならば，$|A|$ は整数になることを示せ。

(2) $n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対して，すべての成分を $(-1)$ 倍して得られる行列 $(-a_{ij})$ を $-A$ で表す。$|-A|$ を $|A|$ を用いて表せ。

(3) $n \times n$ 行列 $A$ の各成分が $x$ の 1 次式であるとき，$|A|$ は $x$ の高々$n$ 次式となることを示せ。