

## §1 ベクトル空間の定義 演習問題 1

📎 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (★★☆)(実数値関数のなす空間) 集合  $X$  上の実数値関数全体を  $\mathcal{F} = \mathcal{F}(X; \mathbb{R})$  とする.  $\mathcal{F}$  における加法とスカラー倍を次のように定義することができる:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

ここで,  $f$  および  $g$  は  $\mathcal{F}$  の任意の元であり,  $x$  は  $X$  の任意の元,  $\lambda$  は任意の実数値である. このとき, ここで定めた加法・スカラー倍によって  $\mathcal{F}$  は  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間になることを示せ.

2 (★★☆)(等式の証明)  $V$  を  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とし,  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$  とする. このとき等式

$$(\alpha + \beta)(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + (\alpha - \beta)(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = 2\alpha\mathbf{x} + 2\beta\mathbf{y}$$

が成り立つことを, ベクトル空間の公理を用いて示せ.