

§11 行列の対角化と三角化 演習問題3

📌 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】☆☆☆ 【発展】☆☆☆

1 (☆☆☆)(traceに関する不等式)

N を $n \times n$ 対称行列で, K を $n \times n$ 正定値行列とする. $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$ をそれぞれ N の固有値の最小値, 最大値とすると, 不等式

$$\lambda_{\min} \text{trace}(K) \leq \text{trace}(NK) = \text{trace}(KN) \leq \lambda_{\max} \text{trace}(K)$$

が成り立つことを示せ.

2 (☆☆☆☆)(Schurの不等式)

X を n 個の実数固有値 $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ を持つ n 次実正方行列とする. このとき, 不等式

$$\text{trace}(X^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \text{trace}(XX^T)$$

が成り立つことを示せ. ただし, X^T は行列 X の転置を表す.