

## §11 行列の対角化と三角化 演習問題3

📌 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】☆☆☆ 【発展】☆☆☆

### 1 (☆☆☆)(traceに関する不等式)

$N$  を  $n \times n$  対称行列で,  $K$  を  $n \times n$  正定値行列とする.  $\lambda_{\min}, \lambda_{\max}$  をそれぞれ  $N$  の固有値の最小値, 最大値とすると, 不等式

$$\lambda_{\min} \text{trace}(K) \leq \text{trace}(NK) = \text{trace}(KN) \leq \lambda_{\max} \text{trace}(K)$$

が成り立つことを示せ.

### 2 (☆☆☆☆)(Schurの不等式)

$X$  を  $n$  個の実数固有値  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  を持つ  $n$  次実正方行列とする. このとき, 不等式

$$\text{trace}(X^2) = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \leq \text{trace}(XX^T)$$

が成り立つことを示せ. ただし,  $X^T$  は行列  $X$  の転置を表す.