

実対称行列の対角化 答

1 行列 A の固有値と固有ベクトルを求める。固有値に重複がなければ固有ベクトルを単に正規化する（長さを 1 にする）。固有値に重複がある場合は、グラム・シュミットの正規直交化法により、固有空間の正規直交基底を求める。そうして得られた固有ベクトルを並べると、 A を対角化する直交行列 P が得られる。

$$(1) P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{とおくと, } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & & \\ & -3 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$$

$$(2) P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} & -\frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{35}} \\ \frac{3}{\sqrt{15}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} \\ \frac{2}{\sqrt{15}} & 0 & \frac{5}{\sqrt{35}} \end{bmatrix} \text{とおくと, } P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 9 & & \\ & -5 & \\ & & -5 \end{bmatrix}$$