

基底・次元 演習問題 1 解答

問 1. $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とする. 以下の間に答えよ.

(i) \mathbb{R}^2 に含まれるどんなベクトルも $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の 1 次結合で表せること, すなわち $\mathbb{R}^2 \subset \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ であることを示せ.

(Hint: $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ とする (任意に \mathbb{R}^2 に含まれるベクトルをとってくる). このとき $\mathbf{x} = k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2$ ($k_1, k_2 \in \mathbb{R}$) の形で表せることを言えばよい.)

解答. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ をとる. このとき

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + (-x_1 + 2x_2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (x_1 - x_2)\mathbf{a}_1 + (-x_1 + 2x_2)\mathbf{a}_2 \in \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle.$$

したがって, $\mathbb{R}^2 \subset \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ とわかる. ■

注意. k_1, k_2 に関する連立 1 次方程式 $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{x}$ の解を求めればよい.

(ii) $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ が \mathbb{R}^2 の基底であることを示せ.

解答. $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$ に含まれるすべてのベクトルは \mathbb{R}^2 に属するので $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle \subset \mathbb{R}^2$ となる. (i) と合わせて $\mathbb{R}^2 = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$, すなわち $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は \mathbb{R}^2 の生成系だとわかる. また,

$$|\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

より, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は 1 次独立だとわかる. 以上より $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は \mathbb{R}^2 の基底である. ■

問 2. (i)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

とする. $\text{rank } A$ を求めよ.

解答. 行基本変形すると

$$A \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

とわかるので $\text{rank } A = 2$. ■

(ii) 同次連立 1 次方程式

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 9x_4 = 0 \end{cases}$$

を解け.

解答. 与えられた連立 1 次方程式の係数行列は (i) の A であり, (i) の結果から方程式の解は

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

となる. ■

(iii) (ii) の同次連立 1 次方程式の解空間を W とする. すなわち

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{cccc} x_1 & +x_2 & +3x_3 & +4x_4 = 0 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & +6x_4 = 0 \\ 2x_1 & +2x_2 & +7x_3 & +9x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

とする. W の基底と $\dim W$ を求めよ.

解答.

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とおく. (ii) の結果から同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ のすべての解は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の 1 次結合として表され, 逆に $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ の 1 次結合で表されるベクトルは, 方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の解であることがわかる. よって $W = \langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \rangle$, すなわち $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は W の生成系である. また, $k_1\mathbf{a}_1 + k_2\mathbf{a}_2 = \mathbf{o}$ とすると

$$k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

であり, 第 2, 第 4 成分に注目すれば $k_1 = k_2 = 0$ とわかる. したがって $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は 1 次独立である. 以上より $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$ は W の 1 組の基底であり, $\dim W = 2$ となる. ■

注意.

- 部分空間に対して, その基底のとり方は無数にあるため, 基底を求める問題の答えは 1 通りではない. 大事なことは, どんな基底を選んだとしても基底を構成するベクトルの個数は一定であるということであり, それを次元と呼んでいる.
- 一般に未知数 n の同次連立 1 次方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{o}$ の基本解は, 解空間 W の 1 組の基底となり, $\dim W = n - \text{rank } A$ が成立する.