

§5 線形写像と像・核 演習問題2

📎 問題の難易度の目安【基礎】☆☆☆ 【標準】★★☆ 【発展】★★★

1 (☆☆☆)(線形写像の像と核)

次の線形写像の像と核を求めよ.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2; \quad f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x - y + z \\ 2x - 2y + 2z \end{pmatrix}.$$

2 (★★☆)(線形変換の像と核の基底と次元)

次の線形変換の像と核の基底と次元を求めよ.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3; \quad f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) := \begin{pmatrix} x + 2y - z \\ y + z \\ x + y - 2z \end{pmatrix}.$$

3 (★★☆)(線形変換による1次独立性)

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ を線形変換とする. このとき次を示せ:

1. $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ が1次独立で $\text{Ker } f = \{\mathbf{o}\}$ ならば $\{f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_n)\}$ も1次独立である.
2. $\{f(\mathbf{a}_1), \dots, f(\mathbf{a}_n)\}$ が1次独立ならば $\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n\}$ も1次独立である.