

線形写像の表現行列 演習問題 1

問 1. 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f \left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ について, 以下の問に答えよ.

(i) \mathbb{R}^3 の標準基底と \mathbb{R}^2 の標準基底に関する f の表現行列を答えよ.

(ii) \mathbb{R}^3 の基底 $\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ と \mathbb{R}^2 の基底 $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ に関する f の表現行列 F を

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \end{bmatrix}$$

とおく. $f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3)$ をそれぞれ $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, f_{ij} (1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$ を用いて表わせ (表現行列の定義を確認せよ).

(iii) 5 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3)$ を各列に並べて得られる 2×5 行列 $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), f(\mathbf{a}_3)]$ に行基本変形を施して得られる階段行列を

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & f'_{11} & f'_{12} & f'_{13} \\ 0 & 1 & f'_{21} & f'_{22} & f'_{23} \end{bmatrix}$$

とおくとき, すべての $i, j (1 \leq i \leq 2, 1 \leq j \leq 3)$ について $f_{ij} = f'_{ij}$ であることを確認せよ.

問 2. \mathbb{R}^2 の 2 組の基底 $\mathcal{A} = \left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ と $\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{b}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ について, 以下の問に答えよ.

(i) \mathcal{A} から \mathcal{B} への基底取り替え行列を

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$

とおく. $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ をそれぞれ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, p_{ij} (1 \leq i, j \leq 2)$ を用いて表わせ (基底取り替え行列の定義を確認せよ).

(ii) 4 つの 2 次元ベクトル $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ を各列に並べて得られる 2×4 行列 $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2]$ に行基本変形を何回か施して得られる階段行列を

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & p'_{11} & p'_{12} \\ 0 & 1 & p'_{21} & p'_{22} \end{bmatrix}$$

とおくとき, すべての $i, j (1 \leq i, j \leq 2)$ について $p_{ij} = p'_{ij}$ であることを確認せよ.