

線形写像の表現行列 演習問題 2

本演習問題における基底に関する座標，線形写像の表現行列は，次の意味で用いる*1.

- $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ を \mathbb{R}^n の標準基底，すなわち

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

とする．多くの場合我々は， \mathbb{R}^n に属すベクトル x を

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + x_n \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n,$$

すなわち「 x は e_1 を x_1 倍， e_2 を x_2 倍， \dots ， e_n を x_n 倍したベクトルの和である，そして x は始点を原点としたとき，終点の座標が (x_1, x_2, \dots, x_n) のベクトルである」というように，標準基底 S を“基準のベクトルの組”として \mathbb{R}^n を考えている．もっと一般に $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を標準基底 S とは限らない \mathbb{R}^n の 1 組の基底とすると，各 $x \in \mathbb{R}^n$ に対し， x は

$$x = c_1 a_1 + c_2 a_2 + \dots + c_n a_n$$

と一意的に a_1, a_2, \dots, a_n の 1 次結合で表せる．このとき

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

を基底 A に関する x の座標という．粗っぽく言えば $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ を“基準のベクトルの組”として \mathbb{R}^n を考えたとき（すなわち標準基底 S の代わりに各座標軸の向きと単位長さを $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ の向きと大きさにして \mathbb{R}^n の座標系を考えたとき）， $x \in \mathbb{R}^n$ は始点を原点とすれば，終点の座標が (c_1, c_2, \dots, c_n) のベクトルに思えるということである．

- $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とし， $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ と $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ をそれぞれ \mathbb{R}^n と \mathbb{R}^m の 1 組の基底とすると， $f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_n) \in \mathbb{R}^m$ は $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ が \mathbb{R}^m の基底であるから

$$\begin{cases} f(a_1) = f_{11}b_1 + f_{21}b_2 + \dots + f_{m1}b_m \\ f(a_2) = f_{12}b_1 + f_{22}b_2 + \dots + f_{m2}b_m \\ \vdots \\ f(a_n) = f_{1n}b_1 + f_{2n}b_2 + \dots + f_{mn}b_m \end{cases} \quad (2.1)$$

*1 定義や記号の使い方は，「村上正康・佐藤恒雄・野澤宗平・稲葉尚志 共著，教養の線形代数 六訂版，培風館」を参考にしている．

と一意的に表せる. このとき $m \times n$ 行列

$$F = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{mn} \end{bmatrix}$$

を基底 \mathcal{A} と基底 \mathcal{B} に関する f の**表現行列**という. つまり, 各 j 列に $f(\mathbf{a}_j)$ の \mathcal{B} に関する座標を並べて得られる行列である. 実は \mathbb{R}^n を基底 \mathcal{A} , \mathbb{R}^m を基底 \mathcal{B} を用いて考えたときに, 線形写像 f は各ベクトルに左から F を掛ける操作に見えている (後の問題を参照). とくに $n = m$ の場合, 線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ の基底 \mathcal{A} と基底 \mathcal{A} に関する表現行列を, 単に基底 \mathcal{A} に関する表現行列ということもある. また, 連立した式 (2.1) は行列を使って

$$[f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_n)] = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]F$$

と表せることに注意せよ. $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ は \mathbb{R}^m の基底であり, とくに 1 次独立な \mathbb{R}^m に属す m 個のベクトルの組であるから, $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]$ は正則になることに注意すると, 基底 \mathcal{A} と基底 \mathcal{B} に関する f の表現行列は

$$F = [\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m]^{-1}[f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \dots, f(\mathbf{a}_n)] \quad (2.2)$$

で定まる $m \times n$ 行列であると言い換えることもできる.

以上を踏まえた上で, 次の問に答えよ.

問題 1. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とし, 以下の問に答えよ.

(i) $A = [f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \dots, f(\mathbf{e}_n)]$ とおけば, 任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$$

と表せることを示せ (つまり線形写像は必ず行列を左から掛ける形で表せる).

(ii) いま $\mathcal{S}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ を \mathbb{R}^m の標準基底とする. 線形写像 f の標準基底 $\mathcal{S} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ と標準基底 $\mathcal{S}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_m\}$ に関する表現行列は A と等しいことを示せ.

問題 2. $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像とし, $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n\}$ を \mathbb{R}^n の 1 組の基底, $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_m\}$ を \mathbb{R}^m の 1 組の基底とする. また, \mathcal{A} と \mathcal{B} に関する f の表現行列を F とする. いま, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ とおき, \mathbf{x} の \mathcal{A} に関する座標, \mathbf{y} の \mathcal{B} に関する座標をそれぞれ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

とする. このとき

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = F \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

が成立することを示せ（つまり， \mathbb{R}^n を基底 \mathcal{A} ， \mathbb{R}^m を基底 \mathcal{B} を用いて考えたときに，線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ は各ベクトルに左から F を掛ける操作に見えている）。

問題 3. 線形写像

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2)$$

の基底 $\left\{ \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, -\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ に関する表現行列を求めよ。