ベクトルの内積，正規直交系　演習問題１

各 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}$ がただ 1 つ定まっていて，

(i) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a})$,

(ii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}) + (\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c})$,

(iii) $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(k\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$,

(iv) $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) \geq 0$ であり，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$

をみたすとき，$(\cdot, \cdot)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の**内積**という．(i) と (ii)，(i) と (iii) からそれぞれ

- $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c})$,
- $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, k\boldsymbol{b}) = k(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

が成り立つことに注意せよ．また，これらの性質を複数回用いることで，$k_i, \ell_j \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j \in \mathbb{R}^n$ $(i = 1, 2, \cdots, p, j = 1, 2, \cdots q)$ に対し

$$\left(\sum_{i=1}^{p} k_i \boldsymbol{a}_i, \sum_{j=1}^{q} \ell_j \boldsymbol{b}_j \right) = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} k_i \ell_j (\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{b}_j)$$

が成り立つこともわかる．また，$\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a})}$$

を $\boldsymbol{a}$ の**ノルム**という．

以下では，$\mathbb{R}^n$ に内積 $(\cdot, \cdot)$ が与えられているとする．

問 1. $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{o}) = 0$ となることを示せ．

問 2. 以下がそれぞれ成り立つことを示せ．

(i) $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|\boldsymbol{a}\| \geq 0$ であり，$\|\boldsymbol{a}\| = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{o}$.

(ii) $k \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|k\boldsymbol{a}\| = |k|\|\boldsymbol{a}\|$.

(iii) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})| \leq \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$. [*1]

(iv) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ に対し，$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\| \leq \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$. [*2]

問 3. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 + \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2 = 2(\|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2)$$

が成り立つことを示せ．

問 4. $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ に対し，

$$(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = \frac{1}{4}(\|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\|^2 - \|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\|^2)$$

が成り立つことを示せ．

[*1] シュワルツの不等式とよばれる．

[*2] 三角不等式とよばれる．