§13 標本平均，大数の法則　演習問題 1

問題の難易度の目安【基礎】★☆☆　【標準】★★☆　【発展】★★★

$\boxed{1}$ (★☆☆)(**Chebyshev の不等式**)

X を密度関数 $f(x)$ をもつ連続型確率変数とする．X の平均を $\mu = E(X)$，分散を $\sigma^2 = V(X)$ とする．このとき $\varepsilon > 0$ に対して

$$P\left(|X-\mu| \geqq \varepsilon\right) \leqq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

であることを示せ．これを **Chebyshev**（チェビシェフ）**の不等式**という．

$\boxed{2}$ (★★☆)(**大数の法則**)

$X_1, \ldots, X_n$ を互いに独立で同じ分布に従う確率変数とする (これを無作為標本という)．この分布の平均を $\mu = E(X_i)$，分散を $\sigma^2 = V(X_i)$ とおく．標本平均

$$\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

について，次の各問いに答えよ．

(1) $\overline{X}$ の平均 $E(\overline{X})$ と分散 $V(\overline{X})$ を求めよ．

(2) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\lim_{n\to\infty} P\left(|\overline{X} - E(\overline{X})| \geqq \varepsilon\right) = 0$$

であることを示せ．これを**大数の法則** (law of large numbers) という．*

$\boxed{3}$ (★☆☆)(**大数の法則の応用 1**)

すべての目が等確率で出るサイコロを 300 回投げるとき，1 の目は概ね 50 回程度出ると考えて良いか．大数の法則に基づいて判定せよ．

$\boxed{4}$ (★★☆)(**大数の法則の応用 2**)

1 枚のコインを n 回投げるとき，表が出る回数を X とする．n が大きくなるとき，$\dfrac{X}{n}$ はいくらに近づくか．

*正確には**大数の弱法則**とよばれる．これに対して $P\left(\lim_{n\to\infty} \overline{X} = E(\overline{X})\right) = 1$ を**大数の強法則**という．

$\boxed{5}$ (★★★)(**中心極限定理と大数の法則**)

以下の問いに答えよ．

(1) $z \in \mathbb{R}$ に対して，$\Phi(z) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx$ とおく．このとき，$\Phi(z) + \Phi(-z) = 1$ であることを示せ．

(2) $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ を互いに独立で同じ確率分布に従う確率変数列とし，

$$\mu = E(X_i), \qquad \sigma^2 = V(X_i), \qquad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

とする．このとき中心極限定理

$$\lim_{n\to\infty} P\left(a \leqq \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \leqq b \right) = \Phi(b) - \Phi(a) \quad (a \leqq b)$$

を用いて，大数の法則を導け．