母比率の検定　問題1　解答

$\boxed{1}$ ある母集団に対し, 以下の母比率の検定をせよ.

(1) 母集団から 2400 個の標本を無作為抽出したところ, ある特性 P を持つ標本の個数は 120 個であった. このとき特性 P に関する母比率 p において,

- 帰無仮説 $H_0 : p = 0.04$,
- 対立仮説 $H_1 : p \neq 0.04$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - p}{\text{S.E.}}, \quad \text{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

とおく. 帰無仮説 H_0 が成り立つとすると Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. ここで, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. 標本比率は $\hat{p} = \dfrac{120}{2400} = 0.05$ であるから, この検定統計量における実現値 z は

$$\text{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.04 \times (1 - 0.04)}{2400}} = 0.004,$$
$$z = \frac{\hat{p} - p}{\text{S.E.}} = \frac{0.05 - 0.04}{0.004} = 2.5.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(2) 母集団から 1000 個の標本を無作為抽出したところ, ある特性 P を持つ標本の個数は 150 個であった. このとき特性 P に関する母比率 p において,

- 帰無仮説 $H_0 : p = 0.1$,
- 対立仮説 $H_1 : p \neq 0.1$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - p}{\text{S.E.}}, \quad \text{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

とおく. 帰無仮説 H_0 が成り立つとすると Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. ここで, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. 標本比率は $\hat{p} = \dfrac{150}{1000} = 0.15$ であるから, この検定統計量における実現値 z は

$$\text{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.1 \times (1 - 0.1)}{1000}} = 0.009487,$$
$$z = \frac{\hat{p} - p}{\text{S.E.}} = \frac{0.15 - 0.1}{0.009487} = 5.27.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(3) 母集団から 500 個の標本を無作為抽出したところ, ある特性 P を持つ標本の個数は 90 個であった. このとき特性 P に関する母比率 p において,

- 帰無仮説 $H_0 : p = 0.2$,
- 対立仮説 $H_1 : p \neq 0.2$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - p}{\mathrm{S.E.}}, \quad \mathrm{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

とおく. 帰無仮説 H_0 が成り立つとすると Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. ここで, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 1% 点 $z_{0.01} = 2.58$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.58\}$$

と設定する. 標本比率は $\hat{p} = \dfrac{90}{500} = 0.18$ であるから, この検定統計量における実現値 z は

$$\mathrm{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.2 \times (1-0.2)}{500}} = 0.01789,$$
$$z = \frac{\hat{p} - p}{\mathrm{S.E.}} = \frac{0.18 - 0.2}{0.01789} = -1.118.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(4) 母集団から 160 個の標本を無作為抽出したところ, ある特性 P を持つ標本の個数は 135 個であった. このとき特性 P に関する母比率 p において,

- 帰無仮説 $H_0 : p = 0.9$,
- 対立仮説 $H_1 : p \neq 0.9$

として有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - p}{\mathrm{S.E.}}, \quad \mathrm{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

とおく. 帰無仮説 H_0 が成り立つとすると Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. ここで, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 1% 点 $z_{0.01} = 2.58$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.58\}$$

と設定する. 標本比率は $\hat{p} = \dfrac{135}{160} = 0.84375$ であるから, この検定統計量における実現値 z は

$$\mathrm{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.9 \times (1-0.9)}{160}} = 0.02372,$$
$$z = \frac{\hat{p} - p}{\mathrm{S.E.}} = \frac{0.84375 - 0.9}{0.02372} = -2.372.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(5) 母集団から 100 個の標本を無作為抽出したところ, ある特性 P を持つ標本の個数は 70 個であった. このとき特性 P に関する母比率 p において,

- 帰無仮説 $H_0 : p = 0.75$,
- 対立仮説 $H_1 : p \neq 0.75$

として有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - p}{\mathrm{S.E.}}, \quad \mathrm{S.E.} = \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}.$$

とおく. 帰無仮説 H_0 が成り立つとすると Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. ここで, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. このとき棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. 標本比率は $\hat{p} = \dfrac{70}{100} = 0.7$ であるから, この検定統計量における実現値 z は

$$\begin{aligned} \mathrm{S.E.} &= \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = \sqrt{\frac{0.75 \times (1 - 0.75)}{100}} = 0.0433, \\ z &= \frac{\hat{p} - p}{\mathrm{S.E.}} = \frac{0.7 - 0.75}{0.0433} = -1.155. \end{aligned}$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

$\boxed{2}$ 2 つの母集団 A, B に対し, 以下の母比率の差の検定をせよ.

(1) 母集団 A から 150 個の標本を無作為抽出したところ, 90 個の標本がある特性 P を持ち, 母集団 B から 250 個の標本を無作為抽出したところ, 特性 P を持つ標本は 110 個となった. このとき A, B の特性 P に関する母比率をそれぞれ p_x, p_y とし,

- 帰無仮説 $H_0 : p_x = p_y$,
- 対立仮説 $H_1 : p_x \neq p_y$

として, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 帰無仮説 H_0 が成り立つと仮定し, 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) p(1-p)}}$$

とおく. ここで $p = p_x = p_y$ とした. このとき Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. また, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. 棄却域 R は, 標準正規分布の両側 1% 点 $z_{0.01} = 2.58$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.58\}$$

と設定する. p の代わりにプールした標本比率 $\hat{p}$ を用いて検定統計量の実現値を求める. 標本比率 $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ およびプールした標本比率 $\hat{p}$ を求めると,

$$\hat{p}_x = 0.6,\ \hat{p}_y = 0.44,\ \hat{p} = \frac{x+y}{m+n} = \frac{90+110}{150+250} = 0.5.$$

検定統計量 Z における実現値 z は

$$z = \frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{0.6 - 0.44}{\sqrt{\left(\frac{1}{150} + \frac{1}{250}\right) \times 0.5 \times (1-0.5)}} = 3.098.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(2) 母集団 A から 200 個の標本を無作為抽出したところ, 110 個の標本がある特性 P を持ち, 母集団 B から 200 個の標本を無作為抽出したところ, 特性 P を持つ標本は 90 個となった. このとき A, B の特性 P に関する母比率をそれぞれ p_x, p_y とし,

- 帰無仮説 $H_0 : p_x = p_y$,
- 対立仮説 $H_1 : p_x \neq p_y$

として, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 帰無仮説 H_0 が成り立つと仮定し, 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) p(1-p)}}$$

とおく. ここで $p = p_x = p_y$ とした. このとき Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. また, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. 棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. p の代わりにプールした標本比率 $\hat{p}$ を用いて検定統計量の実現値を求める. 標本比率 $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ およびプールした標本比率 $\hat{p}$ を求めると,

$$\hat{p}_x = 0.55,\ \hat{p}_y = 0.45,\ \hat{p} = \frac{x+y}{m+n} = \frac{110+90}{200+200} = 0.5.$$

検定統計量 Z における実現値 z は

$$z = \frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{0.55-0.45}{\sqrt{\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{200}\right)\times 0.5 \times (1-0.5)}} = 2.0.$$

したがって $z \in R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却され, 対立仮説 H_1 が採択される.

(3) 母集団 A から 500 個の標本を無作為抽出したところ, 130 個の標本がある特性 P を持ち, 母集団 B から 1000 個の標本を無作為抽出したところ, 特性 P を持つ標本は 230 個となった. このとき A, B の特性 P に関する母比率をそれぞれ p_x, p_y とし,

- 帰無仮説 $H_0 : p_x = p_y$,
- 対立仮説 $H_1 : p_x \neq p_y$

として, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 帰無仮説 H_0 が成り立つと仮定し, 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)p(1-p)}}$$

とおく. ここで $p = p_x = p_y$ とした. このとき Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. また, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. 棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. p の代わりにプールした標本比率 $\hat{p}$ を用いて検定統計量の実現値を求める. 標本比率 $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ およびプールした標本比率 $\hat{p}$ を求めると,

$$\hat{p}_x = 0.26,\ \hat{p}_y = 0.23,\ \hat{p} = \frac{x+y}{m+n} = \frac{130+230}{500+1000} = 0.24.$$

検定統計量 Z における実現値 z は

$$z = \frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{0.26-0.23}{\sqrt{\left(\frac{1}{500}+\frac{1}{1000}\right)\times 0.24 \times (1-0.24)}} = 1.282.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(4) 母集団 A から 98 個の標本を無作為抽出したところ, 58 個の標本がある特性 P を持ち, 母集団 B から 72 個の標本を無作為抽出したところ, 特性 P を持つ標本は 30 個となった. このとき A, B の特性 P に関する母比率をそれぞれ p_x, p_y とし,

- 帰無仮説 $H_0 : p_x = p_y$,
- 対立仮説 $H_1 : p_x \neq p_y$

として, 有意水準 $\alpha = 0.01$ で検定せよ.

[解]: 帰無仮説 H_0 が成り立つと仮定し, 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) p(1-p)}}$$

とおく. ここで $p = p_x = p_y$ とした. このとき Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. また, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. 棄却域 R は, 標準正規分布の両側 1% 点 $z_{0.01} = 2.58$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2.58\}$$

と設定する. p の代わりにプールした標本比率 $\hat{p}$ を用いて検定統計量の実現値を求める. 標本比率 $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ およびプールした標本比率 $\hat{p}$ を求めると,

$$\hat{p}_x = 0.5918,\ \hat{p}_y = 0.4167,\ \hat{p} = \frac{x+y}{m+n} = \frac{58+30}{98+72} = 0.5176.$$

検定統計量 Z における実現値 z は

$$z = \frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{0.5918 - 0.4167}{\sqrt{\left(\frac{1}{98} + \frac{1}{72}\right) \times 0.5176 \times (1 - 0.5176)}} = 2.258.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.

(5) 母集団 A から 200 個の標本を無作為抽出したところ, 110 個の標本がある特性 P を持ち, 母集団 B から 260 個の標本を無作為抽出したところ, 特性 P を持つ標本は 130 個となった. このとき A, B の特性 P に関する母比率をそれぞれ p_x, p_y とし,

- 帰無仮説 $H_0 : p_x = p_y$,
- 対立仮説 $H_1 : p_x \neq p_y$

として, 有意水準 $\alpha = 0.05$ で検定せよ.

[解]: 帰無仮説 H_0 が成り立つと仮定し, 検定統計量を

$$Z = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) p(1-p)}}$$

とおく. ここで $p = p_x = p_y$ とした. このとき Z は標準正規分布 $N(0,1)$ に従う. また, 対立仮説 H_1 より両側検定を行う. 棄却域 R は, 標準正規分布の両側 5% 点 $z_{0.05} = 1.96$ を使い,

$$R = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1.96\}$$

と設定する. p の代わりにプールした標本比率 $\hat{p}$ を用いて検定統計量の実現値を求める. 標本比率 $\hat{p}_x, \hat{p}_y$ およびプールした標本比率 $\hat{p}$ を求めると,

$$\hat{p}_x = 0.55,\ \hat{p}_y = 0.5,\ \hat{p} = \frac{x+y}{m+n} = \frac{110+130}{200+260} = 0.5217.$$

検定統計量 Z における実現値 z は

$$z = \frac{\hat{p}_x - \hat{p}_y}{\sqrt{\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right) \hat{p}(1-\hat{p})}} = \frac{0.55 - 0.5}{\sqrt{\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{260}\right) \times 0.5217 \times (1 - 0.5217)}} = 1.064.$$

したがって $z \notin R$ より, 帰無仮説 H_0 は棄却されない.