微分積分 II　模擬試験問題 G

問題 1. $f(x,y)$，$g(x,y)$ を

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

とする．$f(x,y)$, $g(x,y)$ が $(0,0)$ で連続かどうかそれぞれ調べよ．

問題 2. 次の関数の偏導関数を求めよ．

$$\text{(i) } f(x,y) = 4x^2 + 2xy - y^2 \qquad \text{(ii) } g(x,y) = \log(x - y^2) + \sin(xy)$$

問題 3. 関数 $f(x,y) = 3x^2 - xy - 2y^3$ に対して，$f(x,y) = 0$ が定める曲線上の点 $P(1,1)$ における接線の方程式を求めよ．

問題 4. 関数 $z = \log(x + y^2)$ が定める曲面上の点 $(1, 1, \log 2)$ における接平面の方程式を答えよ．

問題 5. 周の長さが 2 の三角形の中で，面積最大となる三角形は存在するか，さらに存在するとしたらどのような三角形かを求めたい．以下はその考察である．座標 (a,b)，および空欄を埋めよ．ただし，(i), (ii) は不等号，(iii) は実数，(iv) は三角形の種類を答えよ．

“周の長さが 2 の三角形の 3 辺の長さをそれぞれ $x, y, 2-x-y$（$x > 0, y > 0, 2-x-y > 0$）とすると，三角形の成立条件より，$0 < x < 1$ かつ $0 < y < 1$ かつ $1 < x + y < 2$. また，その三角形の面積は Heron の公式によって $\sqrt{(x-1)(y-1)(x+y-1)}$ とわかる．したがって，$f(x,y) = (x-1)(y-1)(x+y-1)$,

$$D = \{(x,y) :\ 0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 1 < x + y < 2\}$$

とおいたとき，$f(x,y)$ が D において最大値をもつかどうか調べればよい．$f(x,y)$ が D において極値をとる点の候補は (a,b) とわかる．$f(x,y)$ の 2 次偏導関数を調べると $f_{xx}(a,b)\ \boxed{\text{(i)}}\ 0$ かつ $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b) - f_{xy}(a,b)^2\ \boxed{\text{(ii)}}\ 0$ とわかるので，$f(x,y)$ は (a,b) において極大値をとる．実は，この極大値が D における最大値になっていることも示される．対応する三角形は 1 辺の長さが $\boxed{\text{(iii)}}$ の $\boxed{\quad\text{(iv)}\quad}$ である．”

問題 6. 条件 $g(x,y)=x^2+4y^2-2=0$ の下で，$f(x,y)=xy$ の極値を求めたい．以下の問に答えよ．

(i) ラグランジュの未定乗数法を用いて，極値をとる点の候補をすべて求めよ．

(ii) (i) で求めた点のうち，第 1 象限にあるものを (a,b) とおく．$g_y(a,b)\neq 0$ から陰関数定理より (a,b) の近くで $g(x,y)=0 \Leftrightarrow y=\varphi(x)$ で $b=\varphi(a)$ をみたす C^2 級関数 $\varphi(x)$ がただ 1 つ存在する．したがって $p(x)=f(x,\varphi(x))$ とおいたとき，(a,b) の近くで $g(x,y)=0$ の条件下で $f(x,y)$ の値を調べることは，$x=a$ の近くで $p(x)$ の値を調べることに対応する．$x=a$ の近くで $g(x,\varphi(x))=0$ となることから，$\varphi'(a)$, $\varphi''(a)$ の値をそれぞれ答えよ．

(iii) $p'(a)$, $p''(a)$ の値を調べることで，$f(x,y)$ が (a,b) で極大値をとる，もしくは極小値をとるか解答し，その値も答えよ．

問題 7. 以下の関数 $f(x,y)$ と領域 D について $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値を解答せよ．

(i) $f(x,y)=\dfrac{\log x}{y},\quad D=\{(x,y):\ 1\leq x\leq e,\ 1\leq y\leq e^x\}$

(ii) $f(x,y)=3x^2+2xy-y^2,\quad D=\{(x,y):\ 0\leq 3x-y\leq 1,\ 0\leq x+y\leq 1\}$

(iii) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}},\quad D=\{(x,y):\ x^2+y^2\leq 4,\ y\leq x\}$