

線形代数 I 模擬試験問題 D

問題 1. 次を計算した結果の行列を答えよ.

$$(i) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^2 \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [1, 2]$$

問題 2. (i) どんな 4 次正方行列 A に対しても, AP が元の行列 A の第 1 列に第 2 列の 2 倍を加えた行列となる基本行列 P .

(ii) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ の余因子行列 \tilde{A} .

問題 3. A, B を対称行列とする. 以下の問に答えよ.

(i) $AB = BA$ が成り立つならば, AB は対称行列となることを示せ.

(ii) AB が対称行列ならば, $AB = BA$ が成り立つことを示せ.

問題 4. 次の行列が正則か正則でないか判定せよ. また, 正則な場合その逆行列も求めよ.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 8 & -2 \\ 0 & -1 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}$$

問題 5. 拡大係数行列を行基本変形して以下の連立 1 次方程式が「ただ 1 つの解をもつ」, 「無数の解をもつ」, 「解をもたない」か判定し, 解をもつ場合は解も求めよ.

$$(i) \begin{cases} 3x - 3y + 4z = -2 \\ x - y + z = -1 \\ 3x - 3y + z = -4 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 2x - 4y - 6z = 2 \\ 3x - 6y - 9z = 3 \end{cases} \quad (iii) \begin{cases} 3x + 2z = 1 \\ -x + 5y + z = 3 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{cases}$$

問題 6. 次の行列式の値を求めよ.

$$(i) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 & 9 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -2 & 8 \\ 2 & 7 & 1 & 11 \end{vmatrix}$$

問題 7.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & x_1 & 1 \\ 3 & -2 & x_2 & 0 \\ 1 & 1 & x_3 & 0 \\ -3 & 1 & x_4 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & x+1 & -2 & 1 & 0 \\ -x-1 & 0 & -3 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2x & 2 \\ -1 & 1 & 2x & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

とする. 以下の問に答えよ.

(i) $|A|$ の第 3 列に関する余因子展開をし, 計算を進めて $|A|$ を x_1, x_2, x_3, x_4 を用いて表わせ.

(ii) x を自分の学生番号の下 3 桁からなる整数とする (もし学生番号が ****789 ならば $x = 789$). このとき $|B|$ の値を求めよ.

問題 8. クラメールの公式が使える仮定を確認した上で、クラメールの公式より以下の連立1次方程式の解を求めよ.

$$(i) \begin{cases} 8x + 7y = -1 \\ 7x + 9y = 2 \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2x + 7y + 3z = 0 \\ 2x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$$