

線形代数 II 試験問題 A

1. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 \\ a \\ 12 \end{bmatrix}$ が生成する \mathbb{R}^3 の部分空間 W の次元が 2 であるとき, a の値を求めよ。

2. 次の線形写像の像と核の基底と次元を求めよ。

(1) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x + y + z \\ 2x - 3y \end{bmatrix}$

(2) $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $f(x) = Ax$, ただし $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

3. 次の行列の固有値と, 各固有値に対する固有空間の基底を求めよ。

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

4. 次の行列が対角化可能であるかどうか判定せよ。対角化可能である場合は対角化せよ。

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & -4 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix}$

5. 行列 $A = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$ について次の問いに答えよ。

(1) A の固有値を求めよ。

(2) (1) で求めた各固有値に対する固有空間の正規直交基底を求めよ。

(3) A を対角化する直交行列を求め, A を対角化せよ。

6. A を実 n 次正方行列とする。次の問いに答えよ。

(1) A の固有値と ${}^t A$ の固有値は同じであることを示せ。

(2) λ, μ を A の 2 つの異なる実数の固有値とし, a を A の λ に対する固有ベクトル, b を ${}^t A$ の μ に対する固有ベクトルとする。このとき

$$(a, b) = 0$$

であることを示せ。ここに $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し

$$(x, y) = {}^t x y$$

(標準内積) である。