線形代数 II 試験問題 B

1. 線形写像 $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+y+z+w \\ x-y+z-w \\ x+z \end{pmatrix}$$

により定義する。f の像と核の基底をそれぞれ求めよ。

2. U を $\mathbb{R}^n$ の部分空間，W を $\mathbb{R}^m$ の部分空間とし，$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とする。

(1) 集合 $S = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid f(\vec{x}) \in W\}$ は $\mathbb{R}^n$ の部分空間となることを示せ。

(2) 集合 $T = \{f(\vec{x}) \mid \vec{x} \in U\}$ は $\mathbb{R}^m$ の部分空間となることを示せ。

3.

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x+y-z+2w=0 \right\}$$

とおく。部分空間 W の正規直交基底を 1 組求めよ。

4. 行列

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

の固有値と各固有値に対する固有空間を求め，対角化できるときには対角化せよ。

5. 次の 5 つの行列を，同じ線形写像の表現行列となっているものにグループ分けせよ。

$$\begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 & -35 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -15 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 & -21 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

6. 次の 3 つの行列のうち，同じ線形写像の表現行列となっているものはどれとどれか。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -1 & 3 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 & -24 & 6 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$