線形代数 II 試験問題 D

1. (1) $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{array}{l} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{array} \right\}$$

の基底と次元を求めよ。

(2) $\mathbb{R}^4$ の部分空間

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$$

の基底と次元を求めよ。

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$ とし，線形写像 $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ を $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ により定める。

(1) $\operatorname{Im} T$ の基底と次元を求めよ。

(2) $\operatorname{Ker} T$ の基底と次元を求めよ。

3. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求め，対角化できる場合には対角化せよ。

(1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$　　(2) $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

4.

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とする。シュミットの方法により，$\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ を正規直交化せよ。

5. (1) 固有値の定義を述べよ。

(2) λ が $n \times n$ 行列 A の固有値なら，任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して，$\lambda + c$ が $A + cI$ の固有値となることを示せ。

(3) A を実数を成分とする $n \times n$ 行列とする。A が実数の固有値 λ を持てば，λ に属する固有ベクトルとして成分がすべて実数のものが取れることを示せ。