

線形代数 II 模擬試験問題 E

問題 1. 以下の W はそれぞれ \mathbb{R}^2 の部分空間ではない. その理由を答えよ.

$$(i) \quad W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1 \right\} \quad (ii) \quad W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \right\}$$

$$(iii) \quad W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0 \right\}$$

問題 2. (i) 行列

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

に行基本変形を複数回行った結果得られる階段行列を答えよ.

(ii) 次のベクトルの組

$$\left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

が 1 次独立であるか 1 次従属であるかを答え、1 次従属であればこれらのベクトルの間に成立する非自明な 1 次関係式を 1 つ答えよ.

問題 3. 次の同次連立 1 次方程式の解空間 W の 1 組の基底と次元 $\dim W$ を答えよ.

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{array}{cccc} 2x_1 & +x_2 & -2x_3 & +5x_4 = 0 \\ x_1 & & -x_3 & +2x_4 = 0 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 = 0 \end{array} \right\}$$

問題 4. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を線形写像

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3)$$

とする. 以下の問に答えよ.

(i) \mathbb{R}^3 の基底

$$\left\{ \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

に関する f の表現行列を答えよ.

(ii) $\text{Ker } f$ の 1 組の基底と, $\dim \text{Ker } f$ を答えよ.

(iii) $\dim \text{Im } f$ を答えよ.

問題 5. 行列

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ -3 & -4 & -3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

に対して、以下の間に答えよ。

- (i) A, B それぞれの固有値と、固有空間をすべて答えよ。
- (ii) 行列 A は対角化可能ではない。その理由を述べよ。
- (iii) 行列 B は対角化可能である。その理由を述べよ。
- (iv) 行列 B を対角化する正則行列 P と、対角化した結果の対角行列 $P^{-1}BP$ を答えよ。

問題 6. 対称行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

に対して、以下の間に答えよ。

- (i) 固有値と固有空間をすべて求めよ。
- (ii) 行列 A の相異なる固有値のうち、重複度 2 であるものを λ とおく。 λ に関する固有空間 W_λ の正規直交基底を 1 組求めよ。
- (iii) 行列 A を対角化する直交行列 P と、対角化した結果の対角行列 $P^{-1}AP$ を答えよ。