理工系向け複素解析学

古島幹雄・大嶋康裕

令和5年2月

1　複素数と複素数列

1.1　虚数単位　$i = \sqrt{-1}$

(1) $i^2 = -1 \Longrightarrow$ i は2次方程式 $x^2 + 1 = 0$ の一つの解

(2) $\dfrac{1}{i} = -i.$

(3) $a \in \mathbb{R}$ とする．$x^2 + a^2 = 0 \Longleftrightarrow x = \pm a\, i$

1.2　複素数

$\mathbb{C} = \{x + y\,i \mid x,\ y \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R} + i\mathbb{R}$ を複素数の集合という．$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ の形の数を**複素数**という．複素数 $z = x + yi$ に対して,

(1) $z = x + yi = 0 \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x = y = 0$

(2) $\overline{z} = x - yi$ を z の**共役複素数**という．

(3)

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2} \geqq 0$$

を z の**絶対値**という．

(4) $z = x + yi \neq 0 \Longrightarrow \dfrac{1}{z} = \dfrac{x - yi}{x^2 + y^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

(5)

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

となる θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ を z の**偏角** (argument) といい,

$$\theta = \operatorname{Arg} z$$

にて表す．θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ に於いて一意的に定まる．

$$\arg z = \mathrm{Arg}\, z + 2\pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

を**一般偏角**という．

(6) $z = x + y\,i \neq 0$ とする．

$$\begin{aligned} z &= x + y\,i = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,i\right) \\ &= |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \\ &= \underline{|z|e^{i\theta} = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}} \end{aligned}$$

これを，z の**極形式**という．特に，

$$z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z} = |z|e^{i\arg z}$$

が成立する．

<u>**命題**</u> **1.1.** (1) $\mathrm{Arg}(z \cdot w) = \mathrm{Arg}\, z + \mathrm{Arg}\, w.$

(2) $\mathrm{Arg}\,\dfrac{z}{w} = \mathrm{Arg}\, z - \mathrm{Arg}\, w.$

(3) $\mathrm{Arg}\, z = 0 \quad \text{for} \quad {}^{\forall}z \in \mathbb{R}\ , \qquad \mathrm{Arg}\, i = \dfrac{\pi}{2}$

1.3 複素数列および数列の和

$\{c_n\}_{n\geqq 1} \subset \mathbb{C}$ を**複素数列**とし，$c_n = a_n + ib_n$ $(a_n.b_n \in \mathbb{R})$ とおく．

<u>**定義**</u> **1.1.** 複素数列 $\{c_n\}_{n\geqq 1}$ が収束するとは，$\{c_n\}_{n\geqq 1}$ がコーシー列であるとき，即ち，任意に $\epsilon > 0$ をとれば，ある自然数 $N = N(\epsilon)$ が存在して，$m, n \geqq N$ なる全ての整数 m, n に対して，$|c_m - c_n| < \epsilon$ が成り立つときをいう．

<u>**注意**</u> **1.1.** $c_n = a_n + \sqrt{-1}b_n$ $(a_n, b_n \in \mathbb{R})$ とおく．

$\{c_n\}_{n\geqq 1}$ が**コーシー列**

$$\Updownarrow$$

$\{a_n\}_{n\geqq 1}, \{b_n\}_{n\geqq 1}$ が共にコーシー列．実際，

$$\begin{aligned} |a_m - a_n|, |b_m - b_n| &\leqq |c_m - c_n| \\ &= \sqrt{|a_m - a_n|^2 + |b_m - b_n|^2|} \\ &\leqq |a_m - a_n| + |b_m - b_n| \end{aligned}$$

より分かる．**実数の完備性**より, コーシー列は収束する．よって, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ となる実数 $a, b \in \mathbb{R}$ がそれぞれ唯一つ存在する．従って,

$$\lim_{n\to\infty} c_n = a + \sqrt{-1}\, b = a + b\, i =: c$$

定義 1.2. (1) 複素無限数列の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が収束するとは，その部分和を

$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k$ とするとき,

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = S < \infty$$

(2) 複素無限数列の和 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が**絶対収束**するとは

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| < +\infty$$

注意 1.2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ が収束すれば,

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty} c_n\right| \leqq \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$$

問題 1.1. 複素数列 $\{\alpha_n\}_{n\geqq 1}, \{\beta_n\}_{n\geqq 1} \subset \mathbb{C}$ に対して,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$$

が成り立つかどうか検証せよ.

2 複素平面と複素領域

2.1 複素平面 $\mathbb{C}$

写像

$$\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ : \ z = x + y\, i \mapsto (x, y) = \varphi(z)$$

は $\mathbb{R}$-線形同値写像である． $z = x + y\, i,\ w = u + v\, i$ とおく.

(1) $\varphi(z + w) = (x + u, y + v) = (x, y) + (u, v) = \varphi(z) + \varphi(w)$

(2) ${}^{\forall} a \in \mathbb{R}$ に対して，$\varphi(az) = (ax, ay) = a \cdot (x, y) = a\varphi(z)$

2.2 $\mathbb{C}$ の位相

$\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$\mathbb{B}_\epsilon(a,b) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ (x-a)^2 + (y-b)^2 < \epsilon^2\}$$

を点 (a,b) を中心とする，半径 $\epsilon > 0$ の**開円板**という．

注意 2.1. $\alpha = a + bi,\ z = x + y\,i$ とおく．

$$\mathbb{D}(\alpha;\epsilon) := \varphi^{-1}\left(\mathbb{B}_\epsilon(a,b)\right) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-\alpha| < \epsilon\} \subset \mathbb{C}$$

を $\alpha \in \mathbb{C}$ 中心，半径 $\epsilon > 0$ の（複素）**開円板**という．

次に，$\mathbb{R}^2$ の部分集合族

$$\mathfrak{U}_{\mathbb{R}^2} := \left\{U \subset \mathbb{R}^2 \ : \ (a,b) \in U \Longrightarrow^{\exists}\, \epsilon > 0\ ;\ \mathbb{B}_\epsilon(a,b) \subset U\right\}$$

を考える．その時，$\mathfrak{U}_{\mathbb{R}^2}$: は次を満たす：

(T1) $\emptyset, \mathbb{R}^2 \in \mathfrak{U}$

(T2) $U, V \in \mathfrak{U} \Longrightarrow U \cap V \in \mathfrak{U}$

(T3) $U_\lambda \in \mathfrak{U}\ ,\ (\lambda \in \Lambda) \Longrightarrow \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \in \mathfrak{U}$

定義 2.1. (1) 部分集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ が**開集合** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $U \in \mathfrak{U}$.

(2) 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ が**閉集合** $\overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow}$ 補集合 $\mathbb{R}^2 - A \in \mathfrak{U}$

$\mathbb{R}^2$ には $\mathfrak{U}_{\mathbb{R}^2}$ の元を開集合とする位相が入る．即ち，$(\mathbb{R}^2, \mathfrak{U}_{\mathbb{R}^2})$ は **位相空間**である．そこで，$\mathbb{C}$ の部分集合族

$$\mathfrak{V}_{\mathbb{C}} := \varphi^{-1}\left(\mathfrak{U}_{\mathbb{R}^2}\right)$$

とおく．そのとき，

$$\mathfrak{V}_{\mathbb{C}} = \left\{W := \varphi^{-1}(U) \ : \ {}^{\forall}\alpha \in W\ ;\ {}^{\exists}\epsilon > 0\ , \mathbb{D}(\alpha;\epsilon) \subset W\right\}$$

を得る．$\mathfrak{V}_{\mathbb{C}}$ は上記の性質 (T1),(T2),(T3) をもつ．この $\mathfrak{V}_{\mathbb{C}}$ の元 W を $\mathbb{C}$ の**開集合**という．即ち，複素数の集合 $\mathbb{C}$ には $\mathfrak{V}_{\mathbb{C}}$ の元を開集合とする位相が入り，この位相のもと，

$$\varphi : \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

は**位相同型**である．こうして，

$$(\mathbb{C}, \mathfrak{V}_{\mathbb{C}}) \overset{\text{位相同型}}{\cong} (\mathbb{R}^2, \mathfrak{U}_{\mathbb{R}^2})$$

である．この位相が備えた集合 $\mathbb{C}$ を複素平面または $\mathbb{C}$-平面という．

2.3　（複素）平面領域

定義 2.2. 複素平面の部分集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ が**領域**であるとは

(1) Ω は $\mathbb{C}$ の開集合である．

(2) Ω は $\mathbb{C}$ で**連結**である，即ち，開集合 $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ に対し，

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$$

ならば，$\underline{\Omega_1 = \Omega \ (\Omega_2 = \emptyset)}$ または $\underline{\Omega_2 = \Omega \ (\Omega_1 = \emptyset)}$.

例 2.1. 開円板 $\mathbb{D}(\alpha : r)$ は複素平面 $\mathbb{C}$ の領域である．

2.4　複素関数

複素平面内の領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ から複素平面 $\mathbb{C}$ への写像

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ z \mapsto f(z)$$

を**複素関数**という．正確には**複素変数複素数値関数**という．

定義 2.3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を領域とする．そのとき，Ω 上の複素関数 $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ が**連続**であるとは, 次の同値な条件を満たす時：

(1) $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ は**連続写像**，即ち，任意の開集合 $U \subset \mathbb{C}$ に対して，その逆像 $f^{-1}(U) \subset \Omega$ が Ω の開集合である．

(2) $f(z)$ は Ω の各点 $^\forall\alpha \in \Omega$ で連続，即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，正の数 $\delta = \delta(\alpha, \epsilon)$ が存在し，$|z - \alpha| < \delta$ なる全ての $z \in \Omega$ に対して $|f(z) - f(\alpha)| < \epsilon$ が成立する．

このとき，

$$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ z \in \Omega}} f(z) = f(\alpha)$$

と書く．

注意 2.2. $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ が連続写像とする．<u>任意の $\epsilon > 0$</u>をとる．そのとき，$w_0 = f(\alpha)$ 中心の開円板（開集合）

$$\mathbb{D}(w_0; \epsilon) = \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w - w_0| < \epsilon\}$$

に対し $f^{-1}(\mathbb{D}(w_0; \epsilon)) \subset \Omega$ は Ω の開集合．$\alpha \in f^{-1}(\mathbb{D}(w_0; \epsilon)$ であるから，α 中心の<u>ある半径 $\delta > 0$</u>の開円板 $\mathbb{D}(\alpha; \delta)$ で

$$^\exists\mathbb{D}(\alpha; \delta) \subset f^{-1}(\mathbb{D}(w_0; \epsilon)) \Longleftrightarrow f(\mathbb{D}(\alpha; \delta)) \subset \mathbb{D}(w_0; \epsilon)$$

となるものが存在する．よって，任意の $z \in \mathbb{D}(\alpha;\delta) \cap \Omega$ に対し，$f(z) \in \mathbb{D}(w_0;\epsilon)$．即ち，

$$\underline{|f(z) - f(\alpha)| = |f(z) - w_0| < \epsilon}$$

こうして，(1) $\Longrightarrow$ (2) が示された．

注意 2.3 (相対位相). $\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とする．

(1) 部分集合 $D \subset \Omega$ が Ω の開集合とは，$\mathbb{C}$ の開集合 $U \subset \mathbb{C}$ が存在し $D = U \cap \Omega$

(2) 部分集合 $F \subset \Omega$ が Ω の閉集合とは，$\mathbb{C}$ の閉集合 $A \subset \mathbb{C}$ が存在し $F = A \cap \Omega$

3 複素関数の微分学

3.1 複素微分可能性

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で定義された複素関数

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

（または，複素関数 $f(z)\,;z \in \Omega$）を考える．

$$\begin{aligned} z &= x + y\,i \ (x, y \in \mathbb{R}) \\ f(z) &= f(x + y\,i) = u(x,y) + i\,v(x,y) \end{aligned}$$

但し，$u(x,y)$，$v(x,y)$ は Ω 上で定義された実数値関数，即ち，u, v は Ω から $\mathbb{R}$ への写像

$u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ : x + y\,i \mapsto u(x,y),\ v(x,y)$

である．

定義 3.1. $f(z)$ が $\alpha \in \Omega$ で**複素微分可能**であるとは，

$$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ z \in \Omega}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = A \quad (\textbf{有限確定な複素数値})$$

この有限確定値 A を $f'(\alpha)$ で表す．

注意 3.1. 有限確定な複素数値とは，有限な複素数として唯一つの値が確定するということ．

$$g(z) = \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha}$$

とおく．そのとき，

$$\lim_{\substack{z \to \alpha \\ z \in \Omega}} g(z)$$

が極限値をもつ（収束する），即ち，z が a に近づく近づき方によらずに，有限確定値 $A = f'(\alpha)$ に近づくということ．

3.2 Cauchy-Riemann の関係式

$(*)$ $z = x + y\,i\,, \alpha = a + b\,i,$

$(*)$ $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)\,, f(\alpha) = u(a,b) + i\,v(a,b)$

とおく．そのとき,

$$f(z) - f(\alpha) = u(x,y) - u(a,b) + i\,\left(v(x,y) - v(a,b)\right).$$

また，$z \to \alpha$ の近づき方（ともに $z \to \alpha$）によらずに極限値が存在するので,

$$\begin{aligned} z = x + b\,i \to \alpha = a + b\,i \quad &\Longleftrightarrow \quad x \to a \\ z = a + i\,y \to \alpha = a + b\,i \quad &\Longleftrightarrow \quad y \to b \end{aligned}$$

の 2 つの近づき方に対しても同じ極限値 $f'(\alpha)$ を得る．

$$\begin{aligned} \underline{f'(\alpha)} &= \lim_{\substack{z\to\alpha \\ z\in\Omega}} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} \\ &= \lim_{x\to a} \frac{u(x,y) - u(a,b)}{x - a} + i\,\lim_{x\to a} \frac{v(x,y) - v(a,b)}{x - a} \\ &= \underline{\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)} \\ &= \lim_{y\to b} \frac{u(x,y) - u(a,b)}{i\,(y - b)} + i\,\lim_{x\to a} \frac{v(x,y) - v(a,b)}{i(y - b)} \\ &= \underline{-i\,\frac{\partial u}{\partial y}(a,b) + \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)} \end{aligned}$$

特に,

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial v}{\partial y}(a,b)\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)}$$

が成立する．これを $z = \alpha$ での **Cauchy-Riemann の関係式**という．

3.3 複素微分作用素

微分作用素

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \\ \\ \dfrac{\partial}{\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right) \end{cases}$$

を考える．Cauchy-Riemann の関係式より，$z=\alpha$ で $f(z)$ が複素微分可能ならば,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z}(\alpha) = f'(\alpha) \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}}(\alpha) = 0 \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} \dfrac{\partial f}{\partial z}(\alpha) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\alpha) \quad \cdots\cdots \quad (\#) \end{cases}$$

を得る．上記の第２式 (#) は Cauchy-Riemann の関係式と同値.

<u>定義</u> **3.2.** $f(z)$ は領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上で定義された複素関数とする．そのとき,

(1) $f(z)$ が**正則**であるとは，$f(z)$ が Ω の各点 $\alpha \in \Omega$ で複素微分可能であるときをいう.

(2) $f(z)$ が $z=\alpha \in \Omega$ で正則であるとは，α 中心の開円板 $\mathbb{D}(\alpha;\delta) \subset \Omega$ が存在して $f(z)$ は $\mathbb{D}(\alpha;\delta)$ で正則であるときをいう.

<u>問題</u> **3.1.** $f(z) = |z|^2$ は $z=0$ で複素微分可能か？ また，$z=0$ で正則か？

4 複素微分の性質

4.1 $\mathcal{C}^1$-級の複素関数

複素平面 $\mathbb{C}$ 上の領域 Ω で定義された複素関数

$$f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

が $\mathcal{C}^1$-級（$f(z) \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ と書く事もある）であるとは,

$$u(x,y), v(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial x}(x,y),\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y),\ \frac{\partial v}{\partial x}(x,y), \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

が Ω 上の (x,y) の実数値関数として Ω で連続のときをいう.

<u>注意</u> **4.1.** 領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ で正則な関数 $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ について，$u(x,y)$，$v(x,y)$ は全微分可能，従って，偏微分可能であり連続である.
実際,

$$\lim_{z \to \alpha} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} = f'(\alpha) = A + B\,i$$

より,

$$\varphi(z) = \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} - f'(\alpha)$$

とおくと，$\lim_{z\to\alpha}\varphi(z)=0$．即ち，任意の $\epsilon>0$ に対し $^{\exists}\delta>0$ が存在して，$0<|z-\alpha|<\delta$ を満たす $z\in\Omega$ に対し，$|\varphi(z)|<\epsilon$ が成立する．

$$
\begin{aligned}
\lambda(z) &= (z-\alpha)\varphi(z) \\
&= f(z)-f(\alpha)-(z-a)f'(\alpha) \\
&= u(x,y)-u(a,b)-A(x-a)+B(y-b) \\
&+ i\,[v(x,y)-v(a,b)-B(x-b)-A(y-b)]
\end{aligned}
$$

一方，$\varphi(z)=\Delta_1(x,y)+i\,\Delta_2(x,y)$ とおく．

$$
\lim_{\substack{x\to a\\ y\to b}}\Delta_i(x,y)=0 \quad (i=1,2)
$$

$$
\begin{aligned}
\lambda(z) &= \Delta_1(x,y)(x-a)-\Delta_2(x,y)(y-b) \\
&+ i\,[\Delta_2(x,y)(x-a)+\Delta_1(x,y)(y-b)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,y)-u(a,b) &= A(x-a)-B(y-b) \\
&+ \Delta_1(x,y)(x-a)-\Delta_2(x,y)(y-b) \\
v(x,y)-v(a,b) &= B(x-a)+A(y-b) \\
&+ \Delta_2(x,y)(x-a)+\Delta_1(x,y)(y-b)
\end{aligned}
$$

今，

$$
\begin{aligned}
(*) &\quad |\Delta_1(x,y)(x-a)-\Delta_2(x,y)(y-b)| \\
\leqq &\quad \sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2}\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(*) &\quad |\Delta_2(x,y)(x-a)+\Delta_1(x,y)(y-b)| \\
\leqq &\quad \sqrt{\Delta_1^2+\Delta_2^2}\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}
\end{aligned}
$$

より, $u(x,y),v(x,y)$ の点 (a,b) での全微分可能性が示せる．よって, $u(x,y),v(x,y)$ は点 (a,b) で偏微分可能で,

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{\partial u}{\partial x}(a,b)=\frac{\partial v}{\partial y}(a,b) \\
B &= -\frac{\partial u}{\partial y}(a,b)=\frac{\partial v}{\partial x}(a,b)
\end{aligned}
$$

逆に，次を得る：

命題 4.1. $f(z)$ は $\Omega \subset \mathbb{C}$ で定義された複素関数で，

$$z = x + y\,i,\ \ \alpha = a + b\,i,\ \ f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$$

とおく．このとき，$u(x,y), v(x,y)$ が (a,b) で全微分可能でコーシー・リーマンの関係式を満たすとき，$f(z)$ は $z = \alpha$ で複素微分可能である．

注意 4.2. $g(x,y)$ が (a,b) で全微分可能なら，$g(x,y)$ は (a,b) で偏微分可能であるが，$\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ は (a,b) で連続とは限らない，そのような $g(x,y)$ の例を挙げよ．

注意 4.3. $u(x,y)$ が点 (a,b) の近傍で $\mathcal{C}^1$-級とすると，$u(x,y)$ が (a,b) で偏微分可能ならば，実は，(a,b) で全微分可能であることが従う．証明は微積分の標準的な教科書に書いてある．

4.2 複素微分演算

$f,\, g \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ とする．そのとき，次が成り立つ（証明せよ！）

(1) $\dfrac{\partial (f\cdot g)}{\partial z} = f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\cdot g$

(2) $\dfrac{\partial (f\cdot g)}{\partial \overline{z}} = f\cdot\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}} + \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}\cdot g$

(3) $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}}$

(4) $\dfrac{\partial (\overline{f}\cdot g)}{\partial z} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z}\cdot g + \overline{f}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial z}$

(5) $\dfrac{\partial (\overline{f}\cdot g)}{\partial \overline{z}} = \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{z}}\cdot g + \overline{f}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial z}}\cdot g + \overline{f}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial \overline{z}}$

(6) $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z} = \overline{\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}}}, \quad \dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \overline{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial z}}$

(7) $\dfrac{\partial^2}{\partial z\partial \overline{z}} = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ （ラプラシアン）

例 4.1.

$$\frac{\partial |z|^2}{\partial z} = \overline{z}, \quad \frac{\partial |z|^2}{\partial \overline{z}} = z \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial^2 |z|^2}{\partial z\partial \overline{z}} = 1$$

問題 4.1. $\dfrac{\partial^2(1+\log|z|^2)}{\partial z\partial \overline{z}}$ を計算せよ．

5 複素曲線

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とする．

定義 **5.1.** (1) 開集合 Ω 内の**曲線（道）** $C \subset \mathbb{C}$ とは，実数直線 $\mathbb{R}$ の閉区間 $I = [a, b]$ から Ω への連続写像

$$\varphi : I = [a, b] \longrightarrow \Omega$$

のこと．または，その像 $C = C_\varphi := \varphi(I) \subset \mathbb{C}$ を曲線と呼ぶこともある．また，$\varphi : [a, b] \longrightarrow \Omega$ を C の定義関数ということもある．

(2) $\alpha = \varphi(a)$ を C の始点 $\beta = \varphi(b)$ を C の終点という．

(3) Ω 内の２点 $p,\ q \in \Omega$ が Ω 内の曲線 C で結べるとは，連続写像 $\varphi : [a, b] \longrightarrow \Omega$ が存在し，$\varphi(a) = p,\ \varphi(b) = q$ を満たすとき．ここに，$C = C_\varphi = \varphi([a, b])$ である．

(4) 曲線 C_φ： $\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ が**閉曲線**とは $\varphi(a) = \varphi(b)(= p)$ を満たすとき．このとき，C を p での**ループ**という．

(5) $C_\varphi,\ \varphi : [a, b] \longrightarrow \Omega$，$\Omega$ 内の曲線とする．そのとき，$t \in [a, b]$ に対して，

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)\, i\,, \quad t \in [a, b]$$

とおいたとき，各 $\varphi_i(t)$ は t の連続実数値関数である．

定義 **5.2.** 曲線 $C_\varphi,\ \varphi : [a, b] \longrightarrow \Omega$ が (a, b) で１対１かつ $\varphi(a) = \varphi(b)$ を満たすとき，$C = C_\varphi = \varphi([a, b])$ を**単純閉曲線** (Jordan 閉曲線) という．

例 **5.1.** 閉区間 $[a, b] \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ は，線分

$$\varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C} \quad t \mapsto t = \varphi(t) = z(t) = t + 0\, i$$

と見なせる．

例 **5.2.** (1) $\varphi : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C}\ :\ t \mapsto \cos t + i \sin t$ の像 $C = \varphi([0, 2\pi])$ は原点を中心とする半径１の円周である．

$$C : \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

時に，

$$C : z(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t\ (0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

と書くこともある．

(2) 実数 $a < b,\ c < d$ に対し連続写像 $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$\varphi(t) = \begin{cases} \{4(b-a)t + a\} + ic & (0 \leqq t \leqq \frac{1}{4}) \\ b + i\{4(d-c)t + 2c - d\} & (\frac{1}{4} \leqq t \leqq \frac{1}{2}) \\ \{-4(b-a)t + 3b - 2a\} + di & (\frac{1}{2} \leqq t \leqq \frac{3}{4}) \\ a + \{-4(d-c)t + 4d - 3c\}i & (\frac{3}{4} \leqq t \leqq 1) \end{cases}$$

で定義すれば，この写像によって定義される曲線 C は点 $a + c\,i, b + c\,i, b + d\,i, a + d\,i$ を頂点にもつ長方形の周をこの順番で反時計回り（正の向きという）に回る閉曲線を表す．

<u>定理</u> **5.1 (Jordan 曲線定理).** 平面内の単純閉曲線 $C : z(t)\ (a \leqq t \leqq b)$ の補集合は互いに交わらない２つの領域からなり，C はこれら２つの領域の共通の境界である．

<u>注意</u> **5.1.** ２つの領域の一方は有界，他方は非有界である．有界な方を C の**内部**といい，非有界な方を C の**外部**という． C の向きは有界な領域を局所的に左に見る向きを**正の向き**という．

有限な長さをもつ単純閉曲線 C で囲まれる領域（有界な方）を $[C]$ と書く． $D = [C]$ の境界は $\partial D = C$ である．特に，$[C]$ の内部を (C) と書く事もある．

<u>定義</u> **5.3.** 複素曲線 $\varphi : [a,b] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ が区分的に滑らかな曲線であるとは，区間 $[a,b]$ 内の有限個の点

$$\{t_1, t_2, \ldots, t_N\}\ (t_1 < t_2 < \ldots < t_N)$$

を除いた任意の点

$$^{\forall}t \in [a,b] - \{t_1, t_2, \ldots, t_N\}$$

で $\varphi(t)$ は $\mathcal{C}^1$-級かつ $\varphi'(t) \neq 0$ である．

特に，$t_0 = a,\ t_N = b$ とする．このとき，区間を

$$[t_0, t_1], \ldots, [t_i, t_{i+1}], \ldots, [t_{N-1}, t_N]$$

に分割し，端点では $\varphi(t)$ は微分可能ではないが，それ以外では $\mathcal{C}^1$-級とできる．

<u>注意</u> **5.2.** 閉曲線 $\varphi : [a,b] \longrightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ が $\varphi(a) = \varphi(b)$ で滑らかであるとは，十分小さな $\epsilon > 0$ に対し，

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(a+\epsilon) - \varphi(a)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{\varphi(b-\epsilon) - \varphi(b)}{-\epsilon}$$

のとき，この値を $\varphi'(a) = \varphi'(b)$ で表わす．

例 **5.3.** 円周 $\varphi:[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{C}\ :\ t\mapsto e^{it}$ について,

$$\begin{aligned}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\varphi(0+\epsilon)-\varphi(0)}{\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{i\epsilon}-1}{\epsilon}=i\\ \lim_{-\epsilon\to 0}\frac{\varphi(2\pi-\epsilon)-\varphi(2\pi)}{-\epsilon} &= \lim_{\epsilon\to 0}\frac{e^{-i\epsilon}-1}{-\epsilon}=i\end{aligned}$$

6 複素線積分

複素平面 $\mathbb{C}$ 上に曲線 $C:\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ を考える.

$$C:z(t)=\varphi(t),\ t\in[a,b]$$

と表す事もある. $[a,b]$ の分割

$$\Delta\ :\ a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

に対し, 分割 Δ に無関係な定数 $^{\exists}M>0$ があって,

$$\sum_{k=1}^{n}|z(t_k)-z(t_{k-1})|\leqq M$$

を満たすとき, C は<u>長さをもつ</u>といい,

$$L(C)=\sup_{\Delta}\sum_{k=1}^{n}|z(t_k)-z(t_{k-1})|$$

を<u>曲線 C の長さ</u>という.

$$L(C):=\int_C|d\,z|$$

と書く. 特に, $z(t)$ が 1 階連続微分可能, 即ち, $z'(t)$ が C 上連続ならば,

$$d\,z=\frac{dz(t)}{d\,t}d\,t$$

より,

$$L(C)=\int_C|d\,z|=\int_a^b\left|\frac{dz(t)}{d\,t}\right|dt$$

を得る.

さて, $C:z=z(t),\ t\in[a,b]$ を複素平面 $\mathbb{C}$ 上の長さを持つ曲線とし, $f(z)$ を C 上で定義された複素連続関数とする.

$$\Delta\ :\ a=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=b,$$

を区間 $[a,b]$ の<u>任意の分割</u>とする．　任意の $^\forall \xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ に対して，

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} f(z(\xi_k))(z(t_k) - z(t_{k-1}))$$

とおく．そのとき，

<u>命題</u> 6.1. 分割の分点の個数を増やし，

$$\delta(\Delta) := \max_{1 \leqq k \leqq n} (t_k - t_{k-1}) \to 0$$

とならしめるようにすれば，S_Δ はある複素数に収束する，即ち，

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} S_\Delta < \infty \quad \text{（収束する）}.$$

<u>問題</u> 6.1. 命題 1 の証明を調べよ．

<u>定義</u> 6.1. 上記の極限値

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} S_\Delta = \int_C f(z)\,dz$$

を $f(z)$ の曲線 C に沿う**複素線積分**という．

上記の曲線 C に対し，$z(a) = \alpha$, $z(b) = \beta$ とおく．

<u>例題</u> 6.1. (1) $\displaystyle\int_C dz = \beta - \alpha.$

$(\because)$

$$S_\Delta = \sum_{k=1}^{n} (z(t_k) - z(t_{k-1})) = z(t_n) - z(t_0) = \beta - \alpha$$

よって，

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0} S_\Delta = \lim_{\delta(\Delta)\to 0} (\beta - \alpha) = \beta - \alpha.$$

(2) $\displaystyle\int_C z\,dz = \frac{1}{2}(\beta^2 - \alpha^2).$

$(\because)$ $\xi_k = t_k$, t_{k-1} とおくことによって次の 2 つの和

$$\begin{aligned} S_\Delta^{(1)} &= \sum_{k=1}^{n} z(t_{k-1})(z(t_k) - z(t_{k-1}) \\ S_\Delta^{(2)} &= \sum_{k=1}^{n} z(t_k)(z(t_k) - z(t_{k-1}) \end{aligned}$$

を得る．$z(t)=t$ であることから，

$$\begin{aligned}
S_\Delta^{(1)}+S_\Delta^{(2)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(z(t_k)^2-z(t_{k-1})^2\right) \\
&= z(t_n)^2-z(t_0)^2=t_n^2-t_0^2 \\
&= \beta^2-\alpha^2
\end{aligned}$$

S_Δ は分割 Δ や $\xi_k\in[t_{k-1},t_k]$ の選び方によらず，

$$\delta(\Delta)\to 0$$

ならば一定値 $\displaystyle\int_C z\,dz$ に収束するので，

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0}\left(S_\Delta^{(1)}+S_\Delta^{(2)}\right)=2\int_C z\,dz=\beta^2-\alpha^2.$$

7　複素線積分の基本的性質

取り扱う曲線はすべて長さ有限とする．

(1) $[a,b]\ni t\to\tau\in[c,d]$ $:\tau=\tau(t)$ なる<u>連続変換</u>（即ち，逆変換 τ^{-1} が存在して連続）があって，

$$C:\ z(t),\ t\in[a,b]\quad;\quad C^*:\zeta(\tau),\ \tau\in[c,d]$$

とすれば，$z(t)=\zeta(\tau(t))$ ゆえ，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C^*}f(z)\,dz.$$

(2) $f(z)$，$g(z)$ が曲線 C 上で連続ならば，${}^\forall\alpha,{}^\forall\beta\in\mathbb{C}$ に対し，

$$\int_C[\alpha f(z)+\beta g(z)]\,dz=\alpha\int_C f(z)\,dz+\beta\int_C g(z)\,dz.$$

(3) 複素平面の曲線

$$\begin{cases} C_1: z=z_1(t), t\in[a,b] \\ C_2: z=z_2(t), t\in[b,c] \end{cases}\qquad \text{但し，}\quad z_1(b)=z_2(b)$$

とする．C_1 の終点と C_2 の始点を連結して得られる曲線 $C=C_1+C_2: z=z(t), t\in[a,c]$ 上の連続関数 $f(z)$ に対し，

$$\int_C f(z)\,dz=\int_{C_1}f(z)\,dz+\int_{C_2}f(z)\,dz.$$

(4)　曲線 C の向きを逆にした曲線を $-C$ と表し，$f(z)$ を C 上定義された連続関数とすると，

$$\int_{-C} f(z)\,dz = -\int_C f(z)\,dz.$$

(5) $F(t)$ を $a \leqq t \leqq b$ で定義された複素数値関数

$$F(t) = \mathrm{Re}\,F(t) + \sqrt{-1}\,\mathrm{Im}\,F(t)$$

で $\mathrm{Re}\,F(t), \mathrm{Im}\,F(t)$ は $[a,b]$ で積分可能とする．このとき，$F(t)$ は $[a,b]$ で積分可能といい，

$$\int_a^b F(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\,F(t)\,dt + \sqrt{-1}\int_a^b \mathrm{Im}\,F(t)\,dt$$

と定める．

(6) 曲線 $C: z = z(t), t \in [a,b]$ を $[a,b]$ を含むある開区間で $\mathcal{C}^1$-級とし，$z'(t) \neq 0, t \in [a,b]$ とする．このような曲線を<u>正則弧</u>という．正則弧は長さをもち，

$$L(C) = \int_a^b |z'(t)|\,dt.$$

(7) $f(z)$ が正則弧 $C: z = z(t), t \in [a,b]$ 上で連続ならば，

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)\,dt.$$

<u>**問題**</u> **7.1.** 上記の (1) $\sim$ (7) を各自証明せよ（参考文献：複素関数論概説：「黒田 正 著」（共立出版）．

<u>**定理**</u> **7.1.** 曲線 C の長さを L とし，$f(z)$ は C 上連続で

$$\max_{z \in C} |f(z)| = M$$

とする．そのとき，

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqq ML(C)$$

が成立する．

<u>**証明**</u> **1.**

$$\begin{aligned} |S_\Delta| &= \left|\sum_{k=1}^n f(z(\xi_k))(z(t_k) - z(t_{k-1})\right| \\ &\leqq M\sum_{k=1}^n |z(t_k) - z(t_{k-1})| \leqq ML \end{aligned}$$

ゆえ，$\delta(\Delta)\to 0$ として

$$\left|\lim_{\delta(\Delta)\to 0} S_\Delta\right| \leqq \lim_{\delta(\Delta)\to 0} |S_\Delta| \leqq ML$$

より結論を得る．

<u>系</u> **7.1.** $f(z)$, $g(z)$ が D で連続かつ C 上，任意の $\epsilon>0$ に対して，

$$|f(z)-g(z)|<\epsilon \Longrightarrow \left|\int_C f(z)\,d\,z-\int_C g(z)\,d\,z\right| < \epsilon L(C)$$

<u>系</u> **7.2.** D 上の連続関数列 $f_n(z)$ が C 上 $f(z)$ に一様収束するなら，

$$\int_C f(z)\,d\,z = \lim_{n\to\infty}\int_C f_n(z)\,d\,z.$$

- $f_n \overset{C}{\rightrightarrows} f$ ：C 上 <u>一様収束する</u>ならば，任意の ${}^\forall\epsilon>0$ に対し，

$$\left|\int_C f_n(z)\,d\,z-\int_C f(z)\,d\,z\right| < \epsilon\cdot L(C)$$

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z)$: C 上 <u>一様収束する</u>ならば，

$$\int_C f(z)\,d\,z = \int_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right) d\,z = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_C f_n(z)\,d\,z\right).$$

即ち，項別積分が可能である．

8　複素線積分の近似

<u>命題</u> **8.1.** C の分点 z_i を順次結ぶ折れ線 $(a=z_0z_1\cdots z_{n-1}z_n=b)$ を Γ とする．さすれば，分点を密にとれば，$\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,d\,z$ はいくらでも $\displaystyle\int_C f(z)\,d\,z$ を近似する．

即ち，$C:\varphi:[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ の分割 $\Delta: a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$ に対し，$C_i=\varphi([t_{i-1},t_i])$ とおき，$\sigma_i=L(C_i)$ $(i=1,\dots,n)$ とおく．任意の $\epsilon>0$ に対し，$\delta>0$ があって，$\max\{\sigma_i\}<\delta$ なる C の分割 $\Delta=(C_1\dots C_n)$ に対し，$z_0z_1\dots z_n$ を結ぶ折れ線を $\Gamma=(z_0z_1\dots z_n)$ にて表すとき，

$$\left|\int_\Gamma f(z)d\,z-\int_C f(z)\,d\,z\right|<\epsilon.$$

が成立する．但し，分割 Δ は $\sigma=\max\{\sigma_i\}$ を十分小さくとれば D 内にある．

証明． (i) : D 内で C を含む閉領域を K とおく．折れ線 Γ は K 内に取れるようにする．K はコンパクトで $f(z)$ は K で連続だから特に K 上で一様連続である, 即ち,

$$\underline{{}^\forall\epsilon>0,\ {}^\exists\delta>0\ \text{s.t.}\ |z-z'|<\delta\Longrightarrow|f(z)-f(z')|<\epsilon.}$$

(ii) : C 上の分点を密に取れば，部分弧 C_i の長さは $L(C_i)<\delta$ のようにできる．こうして，$\sigma<\delta$．C_i に対する折れ線を Γ_i とすれば $L(\Gamma_i)=|z_i-z_{i-1}|<L(C_i)<\delta$. よって, C_i の任意の点 ${}^\forall z\in C_i$ をとれば, $|z-z_i|<\delta$ なので，C_i 上 $|f(z)-f(z_i)|<\epsilon$. よって,

$$\underline{\left|\int_{C_i}f(z)\,dz-\int_{C_i}f(z_i)\,dz\right|<\int_{C_i}|f(z)-f(z_i)|\,dz<\epsilon\cdot\sigma_i}$$

(iii):

$$\int_{C_i}f(z_i)\,dz=f(z_i)\int_{C_i}dz=f(z_i)(z_i-z_{i-1})$$

$$\int_C f(z)\,dz=\sum_{i=1}^n\int_{C_i}f(z)\,dz$$

ゆえ,

$$\begin{aligned}&\left|\int_C f(z)\,dz-\sum_{i=1}^n f(z_i)(z_i-z_{i-1})\right|\\ \leqq\ &\sum_{i=1}^n\left|\int_{C_i}f(z)\,dz-f(z_i)(z_i-z_{i-1})\right|<\epsilon\sum_{i=1}^n\sigma_i=\epsilon\cdot L(C)\end{aligned}$$

同様に Γ についても,

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz-\sum_{i=1}^n f(z_i)(z_i-z_{i-1})\right|<\epsilon L(\Gamma)<\epsilon\cdot L(C)$$

よって，最終的に

$$\left|\int_C f(z)\,dz-\int_\Gamma f(z)\,dz\right|<2\epsilon L(C)$$

を得る． □

命題 8.2. $f(z)$ を領域 D で連続な関数とする．$z_0\in D$ を一つ固定する．任意に $z\in D$ をとる．z_0 と z を結ぶ D 内の曲線を C とする．$\displaystyle\int_C f(z)\,dz$ が C の選び方に依らずに z_0 と z にのみ関係するとする．このとき,

$$F(z)=\int_C f(z)\,dz=\int_{z_0}^z f(z)\,dz$$

にて表す．このとき，$F(z)$ は微分可能で

$$F'(z) = f(z)$$

を満たす．

証明． $F(z_1+h) = \displaystyle\int_{z_0}^{z_1+h} f(z)\,d\,z$ の積分路は z_0 から z_1+h を結ぶ曲線で積分路は z_1 を通るようにとる．そのとき，

$$F(z_1+h) - F(z_1) = \int_{z_1}^{z_1+h} f(z)\,d\,z.$$

$f(z)$ は $z = z_1$ で連続だから, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $^\exists\delta > 0$ があって，

$$|h| < \delta \Longrightarrow |f(z_1+h) - f(z_1)| < \epsilon.$$

$\displaystyle\int_{z_1}^{z_1+h} f(z)\,d\,z$ は積分路に依らないので，特に積分路として z_1 と z_1+h を結ぶ線分 $\overline{z_1, z_1+h} \subset D$ としてよい．このとき，$z \in \overline{z_1, z_1+h}$ ならば $|z - z_1| < |z_1 + h - z_1| = |h| < \delta$ より，

$$\left|\int_{z_1}^{z_1+h} \{f(z) - f(z_1)\}\,d\,z\right| \leqq \epsilon \int_{z_1}^{z_1+h} |d\,z| = \epsilon \cdot |h|,$$

一方，

$$\int_{z_1}^{z_1+h} \{f(z) - f(z_1)\}dz = \int_{z_1}^{z_1+h} f(z)dz - f(z_1)\int_{z_1}^{z_1+h} dz$$

$$= \int_{z_1}^{z_1+h} f(z)\,d\,z - f(z_1)h = F(z_1+h) - F(z_1) - f(z_1)\cdot h.$$

よって，

$$\begin{aligned}|F(z_1+h) - F(z_1) - f(z_1)h| &< \left|\int_{z_1}^{z_1+h} \{f(z) - f(z_1)\}\,d\,z\right| \\ &< \epsilon \cdot |h|.\end{aligned}$$

故に

$$\left|\frac{F(z_1+h) - F(z_1)}{h} - f(z_1)\right| < \epsilon.$$

これは

$$F'(z_1) = f(z_1)$$

を示している． □

定理 8.1 (Goursat の定理). $f(z)$ を複素平面の領域 $D \subset \mathbb{C}$ で正則な関数とする．D 内の３角形 T の内部および境界が D 完全に含まれるとき

$$\oint_T f(z)\, d\, z = 0.$$

が成立する．

証明．

(i): T の各辺の中点を結ぶ線分で $[T]$ を４つの合同な３角形に分ける．それらを $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ としよう．

$$\int_T f(z)\, d\, z = \sum_{k=1}^{4} \int_{T_k} f(z)\, d\, z$$

$$\therefore \quad \left| \int_T f(z)\, d\, z \right| \leqq \sum_{k=1}^{4} \left| \int_{T_k} f(z)\, d\, z \right|$$

よって，少なくとも１つの $T_k (= T_1)$ があって，

$$\frac{1}{4} \left| \int_T f(z)\, d\, z \right| \leqq \left| \int_{T_1} f(z)\, d\, z \right|$$

$[T_1]$ を同じように４つの合同な三角形に分割し，そのうちの一つを改めて T_2 とおき，

$$\frac{1}{4^2} \left| \int_T f(z)\, d\, z \right| \leqq \frac{1}{4} \left| \int_{T_1} f(z)\, d\, z \right| \leqq \left| \int_{T_2} f(z)\, d\, z \right|$$

となるようにできる．この操作を繰り返してゆくと，単調減少する閉三角形の列 $\{[T_n]\}_{n=0}^{\infty}$ の列が得られて，

$$\frac{1}{4^n} \left| \int_T f(z)\, d\, z \right| \leqq \frac{1}{4} \left| \int_{T_n} f(z)\, d\, z \right|$$

が成り立つ．

(ii): 今，$\displaystyle\bigcap_{n=0}^{\infty} [T_n] = \{{}^{\exists}a\}$（１点）が成立する．この a について，$f(z)$ は $z = a$ で複素微分可能なので，任意の $\epsilon > 0$ に対して，${}^{\exists}\delta > 0$ が存在し，$|z - a| < \delta$ ならば

$$f(z) - f(a) = f'(a)(z - a) + \eta(z)(z - a)\ ,\ |\eta(z)| < \epsilon$$

$f(z) = f(a) + f'(a)(z - a) + \eta(z)(z - a)$ より，n を十分大きく取れば，

$$a \in [T_n] \subset \{|z - a| < \delta\}$$

とできる．

$$\begin{aligned}\int_{T_n} f(z)\,d\,z &= f(a)\int_{T_n} d\,z + f'(a)\int_{T_n}(z-a)\,d\,z \\ &+ \int_{T_n}\eta(z)(z-a)\,d\,z \\ &= \int_{T_n}\eta(z)(z-a)\,d\,z\end{aligned}$$

従って，

$$\left|\int_{T_n} f(z)\,d\,z\right| \leqq \int_{T_n}|\eta(z)|\cdot|z-a|\,|d\,z| \leqq \epsilon\,L(T_n)^2 = \epsilon\frac{1}{4^n}L(T)$$

よって，

$$\left|\int_{T} f(z)\,d\,z\right| \leqq \epsilon L(C)^2.$$

$\epsilon > 0$ は任意ゆえ，

$$\int_T f(z)\,d\,z = 0.$$

□

注意 8.1. この証明にはコーシー・リーマンの関係式やグリーン・ストークスの定理を用いない，正則性のみを用いる点で基本的な証明といえる．

定理 8.2. $f(z)$ を領域 $\Omega \subset \mathbb{C}$ の正則関数とする．C を Ω 内の単純閉曲線をとし，C の内部が Ω の点ばかりからなるとき，

$$\int_C f(z)\ dz = 0$$

が成り立つ．

注意 8.2. 定理の仮定 C の内部が Ω の点ばかりからなるは本質的仮定である．特に，Ω が単連結ならば，この仮定は自動的に満たされる．

証明は，以下のステップに分けてなされる．

(I): 任意の $\epsilon > 0$ に対して，C に端点をもつ屈折線 Γ が存在して

$$\left|\int_C f(z)\ dz - \int_\Gamma f(z)\ dz\right| < \epsilon$$

を示す（すでに示した）．

(II): その内部が Ω の点ばかりからなる屈折線 Γ に対して

$$\int_\Gamma f(z)\ dz = 0$$

を示せばよい．そのためには,

(III): Γ の内部を適当に内部が重なり合わない閉三角形

$$[\Delta_{(k)}]\ (k = 1, 2, \ldots, n)$$

に分割し，その周を $\Delta_{(k)}$ としたとき,

$$\int_{\Delta_{(k)}} f(z)\ dz = 0$$

を示せばよい．これは Goursa の定理より分かる．

注意 8.3. 位相空間 X が単連結 (simply connected) とは，起点 $x_0 \in X$ を固定したときの基本群 (fundamental group) が $\pi_1(X, x_0) = 1$（自明）のときをいう．位相空間の基本群について主体的に学修せよ．例えば，基本群について，$\pi_1(\mathbb{C} - \{-1, 1\}, 0) \neq 1$ である．

9　冪級数 (Power Series) について

9.1　冪級数

複素平面上の点 $z = \alpha$ 中心の（形式的）冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n$$

を考える．変換 $z \leftrightarrow z - \alpha$ により，$z = 0$（原点）の中心の形式的冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ を得る．

定理 9.1 (Abel の定理). 冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n$ が $z = z_0 (\neq 0)$ で収束すれば，$|z - \alpha| < |z_0 - \alpha|$ をみたす z に対して $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - \alpha)^n$ は**絶対収束**し,

$$K := \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z - \alpha| \leqq r|z_0 - \alpha|\ (0 <^{\forall} r < 1)\}$$

で**一様収束**する．

証明． $\alpha = 0$ の場合について示す．最初に次を示そう．

• $\lim_{n\to\infty} c_n\, z_0^n = 0$. 即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対し番号 N が存在し，$n \geqq N$ なる全ての n に対して $|c_n\, z_0^n| < \epsilon$ が成り立つ．

$(\because)$ $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n\, z^n < \infty$ より，数列 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k\, z_0^k$ とおくと，$\lim_{n\to\infty} S_n < \infty$. 収束する数列はコーシー列なので

$$\lim_{n\to\infty} |S_{n+1} - S_n| = \lim_{n\to\infty} |c_n z_0^n| = 0.$$

• 次に，$0 < r < 1$ として $|z| \leqq r|z_0|$ とすれば，

$$|c_n z^n| \leqq |c_n\, z_0^n| r^n < \epsilon\, r^n \quad \text{for} \quad {}^{\forall} n \geqq N$$

故に

$$\sum_{n=N}^{\infty} |c_n\, z|^n \leqq \sum_{n=N}^{\infty} \epsilon\, r^n = \epsilon \cdot \frac{r^N}{1-r} \to 0.$$

よって，Abel の定理は示された． □

<u>**定義**</u> **9.1.** 複素平面内の有界閉集合（コンパクト集合）K で定義された連続複素数値関数列 $\{f_n(z)\}$ が関数 $f(z)$ に，

(i) **各点収束**する：$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, 又は $f_n(z) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(z)$.
任意の $z \in K$ および $\epsilon > 0$ に対して，番号 $N = N(\epsilon; z)$ が存在し，$n \geqq N$ のとき，$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ が成立しているとき．

(ii) **一様収束**する：$f_n \overset{K}{\underset{n\to\infty}{\rightrightarrows}} f$, 又は

$$\|f_n - f\|_K := \sup_{z\in K} |f_n(z) - f(z)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

任意の $\epsilon > 0$ に対して，番号 $N = N(\epsilon; K)$（$\epsilon > 0$ と K のみに依存している！）が存在し，$n \geqq N$ のとき，$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$ が全ての $z \in K$ に対して成立しているとき．

9.2 収束半径

冪級数

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

の**収束半径**とは，次を満たす正の数 $0 < R \leq +\infty$ をいう：

(i) $f(z)$ は $\mathbb{D}(z_0;R)=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z-z_0|<R\}$ で絶対収束かつ**広義一様収束**する，即ち，$^\forall r<R$ に対し，$f(z)$ は $\overline{\mathbb{D}(z_0;r)}=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z-z_0|\leqq r\}$ 上で一様収束する．

(ii) $f(z)$ は $\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z-z_0|>R\}$ で発散する．

<u>注意</u> **9.1.** $f(z)$ $\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z-z_0|=R\}$ での収束については分からないが，収束しないと思ったほうが安全である．

冪級数 $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ の収束半径は冪級数の係数からなる無限数列 $\{c_n\}_{n\geq 0}$ によって決まる．以下，このことを考察しよう．まず，

$$0<\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|c_n|}<+\infty$$

の時を考える．

<u>注意</u> **9.2.** $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|c_n|}=0$ の場合は冪級数は収束しないので除外する，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|c_n|}=+\infty$ の時は，全平面 $\mathbb{C}$ で広義一様収束するという事である．それ以外について考察する．

そこで，

$$R:=\frac{1}{\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sup\sqrt[n]{|c_n|}}$$

とおくと，分母は仮定より 0 でないので，R は意味をなす．

<u>命題</u> **9.1.** $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$ は $\Delta(z_0;R)$ で広義一様収束する．即ち，任意の $\epsilon>0$ に対して，$f(z)$ は，$\{|z-z_0|\leq R-\epsilon\}$ で絶対一様収束する．

<u>注意</u> **9.3.** $\displaystyle\overline{\lim_{n\to\infty}}:=\lim_{n\to\infty}\sup$ とおく．

(a) 実数列 $\{a_n\}$ が上に有界とは，$^\exists M$ が存在して，$a_n<M$ が全ての $n\in\mathbb{N}$ について成り立つとき．$\{a_n\}$ が上に有界でないとき，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,a_n:=\lim_{n\to\infty}\sup a_n=\infty$$

とする．

(b) 実数列 $\{a_n\}$ は<u>上に有界</u>とする．$\{a_n,a_{n+1},\ldots,\}$ の上限：

$$A_n=\sup\{a_n,a_{n+1},\cdots,\}$$

とおく．さすれば，A_n は単調減少列：

$$A_1 \geqq A_2 \cdots \geqq A_n \geqq A_{n+1} \geqq \cdots$$

である．そのとき，

$$\varlimsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sup a_n = \lim_{n\to\infty} A_n$$

と定義する． A_n が下に有界：

$$^\exists M \quad ; \quad A_n > M \quad \text{for} \quad {}^\forall n \in \mathbb{N},$$

ならば，実数の連続性公理により，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ は有限の値に収束する．

注意 9.4. $A = \lim\limits_{n\to\infty} \sup a_n$ とすると．A が有限ならば，

(1) 任意の $^\forall \epsilon > 0$ に対して，$A + \epsilon < a_n$ となる n は有限個しかない．

(2) 任意の $^\forall \epsilon > 0$ に対して，$A - \epsilon < a_n$ なる n は無限個存在する．

$A = \infty$ ならば，どんな $R > 0$ に対しても，$R < a_n$ なる n は無限個あり，$A = -\infty$ ならば，どんな $-R < 0$ に対しても，$-R < a_n$ なる n は有限個しかない．

9.3 命題 9.1 の証明

(1) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$ とすると，任意の $z(\neq a)$ に対し，

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|} = |z-a| \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$$

がいえるから，無数に多くの n に対し，

$$|c_n(z-a)^n| > 1.$$

よって，冪級数はどんな $z(\neq a)$ に対しても発散する．即ち，収束半径 $R = 0$ となり，

$$R := \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

が成り立つ．

(2) $\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|c_n|}=0$ とする．任意の正数 $\rho>0$ に対し，$|z-a|\leqq\rho$ となる z について，

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}=|z-a|\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}=0$$

がいえるから，ある番号 N があって，$n>N$ なる全ての n について，

$$\sqrt[n]{|c_n(z-a)^n|}<\frac{1}{2}\qquad\therefore\qquad|c_n(z-a)^n|<\frac{1}{2^n}.$$

よって，幂級数は $|z-a|\leqq\rho$ で収束する．$\rho>0$ の任意性から, 幂級数は全ての $z\in\mathbb{C}$ で収束し，収束半径 $R=\infty$ となり，やはり，

$$R:=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|c_n|}}$$

が成り立つ．

(3) 以下は $R\neq 0,\infty$，即ち，R は有限な場合：

$$R:=\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|c_n|}}<+\infty$$

の場合を考察する．実際，広義一様収束の定義から, 任意のコンパクト集合 $K\subset\Delta(z_0;R)$ 上，絶対値を取った正項級数 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||(z-z_0)|^n$ が一様収束する事を言えばよいが，コンパクト集合 K に対して，$\epsilon_0>0$ を適当に選べば，$K\subset\Delta(z_0;R-\epsilon_0)$ と出来るので，任意の $\epsilon>0$ に対して，閉円板

$$\overline{\Delta(z_0;R-\epsilon)}=\{z\in\mathbb{C}\ :\ |z-z_0|\leq R-\epsilon\}$$

上，一様収束を言えば十分である．

まず，$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \sqrt[n]{|c_n|}=\dfrac{1}{R}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sup\{\sqrt[n]{|c_n|},\sqrt[n]{|c_{n+1}|},\cdots\}\Big)$$

$\alpha_n:=\sup\{\sqrt[n]{|c_n|},\sqrt[n]{|c_{n+1}|},\cdots\}$ が狭義単調減少で $\frac{1}{R}$ に収束することから, 任意に $\epsilon>0$ をとる．このとき，$\dfrac{\epsilon}{R(2R-\epsilon)}$ に対して, ある番号 $N\in\mathbb{N}$ があって，$n\geq N+1$ なる任意の n について，

$$0<\sup\{\sqrt[n]{|c_n|},\sqrt[n]{|c_{n+1}|},\cdots\}-\frac{1}{R}<\frac{\epsilon}{R(2R-\epsilon)}$$

を得る．即ち，

$$\sqrt[n]{|c_n|} \le \sup\{\sqrt[n]{|c_n|}, \sqrt[n]{|c_{n+1}|}, \cdot, \cdot\} < \frac{1}{R} + \frac{\epsilon}{R(2R-\epsilon)} = \frac{1}{R-\frac{\epsilon}{2}}.$$

よって，$|z-z_0| \le R-\epsilon$ なる任意の z および，任意の $n \ge N$ に対し，次を得る．

$$\sqrt[n]{|c_n|}|z-z_0| < \frac{R-\epsilon}{R-\frac{\epsilon}{2}} < 1 \Longleftrightarrow |c_n||z-z_0|^n < \Big(\frac{R-\epsilon}{R-\dfrac{\epsilon}{2}}\Big)^n < 1$$

従って

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||z-z_0|^n = \sum_{n=0}^{N}|c_n||z-z_0|^n + \sum_{n\ge N+1}|c_n||z-z_0|^n \\
= \ & \sum_{n=0}^{N}|c_n||z-z_0|^n + \sum_{n\ge N+1}\Big(\frac{R-\epsilon}{R-\dfrac{\epsilon}{2}}\Big)^n \\
< \ & \sum_{n=0}^{N}|c_n||z-z_0|^n + \Big(\frac{R-\epsilon}{R-\dfrac{\epsilon}{2}}\Big)^{N+1}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{R-\epsilon}{R-\dfrac{\epsilon}{2}}} \\
\le \ & \sum_{n=0}^{N}|c_n|(R-\epsilon)^n + \Big(\frac{R-\epsilon}{R-\dfrac{\epsilon}{2}}\Big)^{N+1}\cdot\frac{2R-\epsilon}{\epsilon} \\
< \ & +\infty
\end{aligned}$$

よって，正項級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|c_n||(z-z_0)|^n$ は閉円板

$$\overline{\Delta(z_0; R-\epsilon)}$$

で一様収束する事が示された．以上で証明を終わる． □

<u>注意</u> **9.5.** 無限等比級数

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}\Big(\frac{R-\epsilon}{R-\dfrac{\epsilon}{2}}\Big)^n$$

は公比 $\dfrac{R-\epsilon}{R-\dfrac{\epsilon}{2}}$ が 1 より小さいので収束することは，高校数学で習った通りである．

10 解析関数

定義 10.1. (1) 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の領域 D で定義された連続関数 $f(z)$ が D の点 $z = z_0 \in D$ で**解析的**であるとは，z_0 中心の半径 r の円板 ${}^{\exists}\Delta(z_0; r) \subset D$ が存在して，$f(z)$ は $\Delta(z_0; r)$ で一様収束する冪級数により表される，即ち，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n < \infty \ \cdots\cdots (*)$$

(2) $f(z)$ が D で解析的とは，D の各点で解析的であるときをいう．以後は，簡単に，$f(z)$ を D 上の**解析的関数**という．

注意 10.1. 一様収束という言葉はコンパクト集合（有界閉集合）に対して用いられる事が多い，上記の円板 $\Delta(z_0; r)$ はコンパクト集合で無いので，この場合は任意の $0 <^{\forall} \rho < r$ に対して，閉円板 $\overline{\Delta}(z_0; \rho)$（コンパクト集合）で一様収束すると解釈する（または，$\Delta(z_0; r)$ で**広義一様収束**するともいう）．

一般に，Ω で定義された関数列 $\{f_n(z)\}$ が広義一様収束するとは，Ω 内の任意のコンパクト集合 $K \subset \Omega$ に対して，関数列 $\{f_n(z)\}$ が K 上一様収束するとき，即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ϵ と K のみに依存し（点 z に依存しない）自然数 $N(\epsilon, K)$ があって，$m.n > N$ に対し，

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \epsilon$$

が全ての $z \in K$に対して成立するときをいう．

11 解析性と正則性

11.1

正則関数は英語で holomorphic function, regular functionといい，解析的関数は analytic functionという．実は両者は同値な概念である事が幾つかの過程を経て分かる．即ち，

定理 11.1. 複素平面上の領域 D で連続な関数を $f(z)$ とする．このとき，$f(z)$ が $z = z_0 \in D$ で正則 $\overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow}$ $f(z)$ は $z = z_0 \in D$ で解析的.

注意 11.1. 複素変数 z の n 次多項式 $P_n(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots c_n z^n$ は正則関数である事は，単項式 $f_n(z) = z^n$ が正則関数であることを言えばよい．実際，帰納法により $P_{n-1}(z)$ は正則とすると，$f_n(z) = z^n$ は正則な

ので，二つの正則関数の和はまた正則．よって，$P_n(z) = P_{n-1}(z) + f_n(z)$ は正則になる．$f_n(z) = z^n$ が正則であることは，$f_n(z) = z^n$ が各点 $z = z_0$ で複素微分可能を示せばよい，実際，

$$\lim_{z \to z_0} \frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \Big(\sum_{k=0}^{n-1} z^k z_0^{n-1-k} \Big) = n z_0^{n-1}$$

より，複素微分可能，即ち，正則である．一般に，

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k (z - z_0)^k$$

は正則関数である．形式的には（収束を問題にしなければ）無限級数は多項式の極限，即ち，

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \lim_{n \to \infty} P_n(z)$$

である．従って，右辺が収束すれば，z の無限級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

は z の関数として意味を持つ．

次の命題の証明を各自せよ．

<u>**命題**</u> **11.1.** (i) 閉円板 $\overline{\Delta}$ 上の連続関数の列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ の一様収束極限 $f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$ は連続である．

(ii) 閉円板 $\overline{\Delta}$ 上の正則関数の列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ の一様収束極限 $f(z) = \lim_{n \to \infty} f_n(z)$ は正則である．

(iii) 任意の $0 <^{\forall} \epsilon < r$ に対し，閉円板

$$\overline{\Delta}(z_0; r - \epsilon) = \{|z - z_0| \leq r - \epsilon\}$$

で正則な関数は開円板 $\Delta(z_0; r)$ 上で正則である．

上記の (ii), (iii) より，収束冪級数で表される複素関数は正則である事が分かる．即ち，**解析的関数は正則関数**が証明された．

11.2　命題 7 の証明

簡単のため，$w = z - z_0$ とおけば，

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$$

と表せる．そこで，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n w^n$ の収束について少し解説しよう．

その前に，基本的な事実確認を行う．

<u>**補題**</u> **11.1.** $K := \overline{\Delta}(0; r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \| z| \leq r\}$ を $z = 0$ 中心，半径 $r > 0$ の閉円板とすると，K は複素平面 $\mathbb{C}$ 上の有界閉集合ゆえ<u>コンパクト集合</u>である．$f(z)$ を K 上の連続関数とすると，$f(z)$ は K 上**一様連続**である．即ち，任意の $^\forall\epsilon > 0$ に対し，<u>K のみに依存</u>する正の数 $\delta := \delta_K$ があって，$|z - z'| < \delta$ なる任意の組 $z, z' \in K$ に対し，

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon$$

が成立する．

Proof. 　$f(z)$ は K 上連続だから，$\alpha z_\nu \in K$ で連続，よって，任意に $\epsilon > 0$ をとれば，<u>z_ν に依存</u>する正の数 $\delta_\nu > 0$ が存在し，

$$|z - z_\nu| < \frac{1}{2}\delta_\nu$$

なる全ての $z \in K$ に対して，

$$|f(z) - f(z_\nu)| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立する．$K_\nu = K \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_\nu| < \dfrac{1}{2}\delta_\nu \right\}$ と置くと，K_ν は K の開集合であり（$\mathbb{C}$ からの<u>相対位相</u>を入れる），

$$K = \bigcup_{\nu} K_\nu$$

を得る．従って，$\{K_\nu\}_\nu$ はコンパクト集合 K はの<u>開被覆</u>である．従って，K は $\{K_\nu\}$ の中の適当な有限個の被覆

$$K_1, K_2, \cdots K_m$$

で覆える（位相空間のコンパクト性の定義を思い起こせ）．即ち，

$$K = \bigcup_{j=1}^{m} K_j.$$

を得る．各添え字 $1 \leq j \leq m$ に対し，$\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_m$ が定まっていた．そこで

$$\delta = \min_{1 \leq j \leq m} \{\frac{1}{2}\delta_j > 0\}$$

とおく．さすれば, $\underline{\text{任意の } z' \in K = \bigcup_{j=1}^m K_j}$をとれば, ある番号 $1 \leq^{\exists} j \leq m$ があって，$z' \in K_j$，即ち，$|z' - z_j| < \dfrac{1}{2}\delta_j < \delta_j$ である．よって，

$$|f(z') - f(z_j)| < \frac{\epsilon}{2}$$

がいえる．従って，$\underline{|z - z'| < \delta \text{ なる任意の } z \in K}$に対し，$|z - z_j| = |z - z' + z' - z_j| \leq |z - z'| + |z' - z_j| < \delta + \dfrac{1}{2}\delta_j < \delta_j$ だから,

$$|f(z) - f(z_j)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

k の二つの不等式により，

$$|f(z) - f(z')| < |f(z) - f(z_j)| + |f(z') - f(z_j)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

を得る．

以上まとめると，任意に $\epsilon > 0$ をとると，ϵ および K にのみ依存する正の数 $\delta > 0$ が存在し，任意の $z' \in K$ および $|z - z'| < \delta$ となる任意の $z \in K$ に対し，

$$|f(z) - f(z')| < \epsilon$$

が成り立つ．こうして，一様連続性が示された □

<u>**補題**</u> **11.2.** 閉円板 $K = \overline{\Delta}(0; r)$ 上の連続な複素関数列 $\{f_n(z)\}$ が K 上一様収束すれば，その極限関数

$$\lim_{n \to \infty} f_n(z)$$

は K 上の連続な複素関数である．

Proof. K 上の点 $a \in K$ を任意にとる．関数値 $f_n(a)$ は複素数なので $a_n = f_n(a)$ と置けば，複素数列 $\{a_n\}_{n \geq 1}$ を得る．関数列が一様収束するので，特に，数列 $\{a_n\}$ は収束する．収束する数列の極限は唯一つなので，

$$\lim_{n \to \infty} f_n(a) = \lim_{n \to \infty} a_n = f(a)$$

とおく（この数列は a に関係した数列なので極限値を $f(a)$ と置いた）．勿論，$z = b, c \cdots$ に対して

$$\lim_{n \to \infty} f_n(b) = f(b),\ \lim_{n \to \infty} f_n(c) = f(c), \cdots \text{ 等々}.$$

こうして，各点 $z \in K$ に対して，極限値

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$$

唯一つ定まるので，$f(z)$ は K 上の複素関数と見てよい．この $f(z)$ が K 上連続（K の各点 $^\forall z_0 \in K$ で連続）である事，即ち，

任意の $\alpha\epsilon > 0$ に対して，z_0 と ϵ に依存する正の数 $\delta := \delta_{z_0}(\epsilon)$ が存在して，$|z - z_0| < \delta$ なる任意の $z \in K$ に対して

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$$

を示せばよい．

実際，$\{f_n(z)\}_{n\geq 1}$ が $f(z)$ は一様収束するので，一様収束の定義から，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ϵ と K に依存する（K の各点 $z \in K$ には依存しない！）自然数 $N \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq N$ なる任意の $^\forall n$ に対して，

$$|f_n(z) - f(z)| < \frac{1}{3}\epsilon$$

が全ての（任意の）点 $z \in K$ に対して成立する．（註：一様の意味は存在を主張している $\delta,\ N$が任意に取った点 z に依らないという事である．）

一方，各 n について，$f_n(z)$ は K 上連続なので K 上一様連続である．よって，上記の $z_0 \in K$ に対して，z_0 に依存しない正の数 $\delta_n > 0$ が存在して，$|z - z_0| < \delta_n$ なる全ての $z \in K$ に対して

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| < \frac{1}{3}\epsilon$$

が成立する．今，$n = N$，$\delta := \delta_N$ と置く．さすれば，$|z - z_0| < \delta$ なる任意の $z \in K$ に対して，上記の二つの不等式から，

$$\begin{aligned}
& |f(z) - f(z_0)| \\
= \ & |(f(z) - f_N(z)) - (f(z_0) - f_N(z_0)) + (f_N(z) - f_N(z_0)| \\
\leq \ & |(f(z) - f_N(z)| + |(f(z_0) - f_N(z_0))| + |(f_N(z) - f_N(z_0)| \\
\leq \ & \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon
\end{aligned}$$

こうして，極限関数 $f(z)$ は K 上連続である．特に，K はコンパクトだから，前の結果より，$f(z)$ は K 上で一様連続であることが示された．□

補題 11.3. 複素平面 $\mathbb{C}$ 上のコンパクト集合

$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$$

で一様収束する冪級数 $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ は K の各点で正則である．

高校生レベルで理解するには多少の準備が必要であるので以下それを観察する.

改めて $z = z - z_0$ とおく事により，$K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ として以後は議論する.

<u>定義</u> **11.1.** まず, $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が K で**絶対一様収束**するとは $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z|^n$ が K で<u>一様収束</u>するときをいう

<u>注意</u> **11.2.** $f_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k z^k$ を n 項までの和とする．コーシーの規準を用いれば，次のように述べる事ができる.

任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\epsilon > 0$ と K のみに依存する正の整数 N が存在して，$N \le m < n$ なる全ての m, n および, 全ての $z \in K$ に対して,

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon$$

が成立するとき.

<u>定義</u> **11.2.** $\alpha z_0 \in K$ で $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が**絶対収束**するするとは，$|z_0|$ の正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||z_0|^n$ が<u>収束</u>する時をいう (<u>各点で絶対収束</u>と言ったほうが分かり易い).

<u>命題</u> **11.2.** 級数 $f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ について，各 $^\forall z \in K$ に対し，n と K のみに依存する正の数 $M_n > 0$ が存在し，$|c_n z^n| \le M_n$ かつ正項級数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$ が収束するとき，$f(z) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は絶対一様収束，特に，K 上一様収束する.

Proof. . まず，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} M_n < +\infty$ が収束するので，コーシーの規準より，任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある番号 N が存在して, $m, n \ge N$ なる任意の $m < n$ に対し,

$$\sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon$$

が成立（収束する数列 $s_k = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} M_j$ はコーシー規準をみたし，逆に，コーシー規準を満たす数列はは収束する).

仮定より，$|c_n z^n| = |c_n||z|^n \leq M_n$．ゆえに，$^\forall z \in K$ に対し，上述の自然数 N をとれば，

$N \leq m < n$ なる任意の $m < n$ に対して，

$$\sum_{k=m}^{n} |c_k||z|^k \leq \sum_{k=m}^{n} M_k < \epsilon.$$

を得る．

つまり，関数列 $\{S_k(z) := \sum_{j=0}^{k} |c_j||z|^j\}_k$ は各点 $^\forall z \in K$ に対してコーシー規準を満たす．自然数 N は K の点の取り方に依らないので，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

は絶対一様収束する事が示された． □

補題 11.4. 冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $K_\delta = \{|z| < r + \delta\}$ で収束すれば，$f(z)$ の右辺の各項を形式的に微分して得られる冪級数

$$g(z) = \sum_{n=1} n c_n z^{n-1}$$

は $K = \{|z| \leq r\}$ で絶対一様収束する．この段階ではまだ$g(z) = f'(z)$ と結論できないことを強調しておく．

Proof. $\xi \in K_\delta$ で $|\xi| = r + \dfrac{\delta}{2}$ なるものを一つとって固定しておく．そのとき，級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n$ は仮定により収束する．よって，任意の $\epsilon > 0$ に対し，ある番号 $N_\xi \in \mathbb{N}$ があって，$n \geq N_\xi$ ならば，

$$|c_n \xi^n| < \epsilon$$

がいえる．そこで，任意に $|z| \leq r$ なる z を選ぶ．そのとき，

$$\frac{|z|}{|\xi|} \leq \frac{r}{r + \frac{\delta}{2}} < 1$$

よって，$n \geq N$ なる n に対して，

$$|n c_n z^{n-1}| = |n c_n||\xi^n||\frac{z^{n-1}}{\xi^n}| < \frac{\epsilon}{r} n \cdot (\frac{r}{r + \frac{\delta}{2}})^n$$

無限等比級数
$$\sum_{n=0}^{\infty} n(\frac{r}{r+\frac{\delta}{2}})^n$$
$\dfrac{r}{r+\frac{\delta}{2}} < 1$ より収束する．従って，

$$\sum_{n=N}^{\infty} |nc_n||z|^n < \epsilon \sum_{n=N}^{\infty} n \cdot (\frac{r}{r+\frac{\delta}{2}})^n < +\infty$$

今,$\epsilon > 0$ は任意なので，冪級数 $\displaystyle\sum_{n=0} nc_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$ は絶対一様収束する事が示された．こうして，冪級数

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$$

は $K = \{|z| \leq r\}$ で絶対一様収束する事が分かった． □

命題 11.3. 冪級数 $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ が $\{|z| < r+\delta\}$ 上で収束するとき，$f(z)$ の右辺の各項を項別微分して得られる冪級数

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n z^{n-1}$$

は $K = \{|z| \leq r\}$ は $\{|z| \leq r\}$ で絶対一様収束し，

$$f'(z) = g(z)$$

となる．即ち，

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n) &= \sum_{n=0}^{\infty}\big(\frac{d}{dz}(c_n z^n)\big) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} nc_n z^{n-1} \end{aligned}$$

が $\{|z| \leq r\}$ なる任意の z に対して成立する．

注意 11.3. この命題により，収束する冪級数の複素微分可能性が証明された．加えて，記号 $\dfrac{d}{dz}$ は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ の中に入れてよいという事がわかる．（標

語としては，極限操作と微分操作は交換可能という）．勿論，有限和に対しては高等学校で習ったように，

$$(f_1(z)+f_2(z)+\cdots f_n)' = f_1(z)' + f_2(z)' + \cdots f_n(z)'$$

は知られているが，関数列の無限和については，ある種の条件の下で（無条件ではない！），任意の点 $z \in K$ に対して

$$\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\Bigr)' = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z)$$

であることを主張している．

注意 11.4. K のある点 $a \in K$ において，

$$\Bigl(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\Bigr)'\Bigr|_{z=a} \neq \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(a)$$

となる関数列の例 $\{f_n(z)\}_n$ を作れ．

Proof. 命題 6.3 の最後の部分 $f'(z) = g(z)$ の証明をしよう．

主張 11.1. 任意に $\alpha z_0 \in K = \{|z| \leqq r\}$ に対し，

$$f'(z_0) = g(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} n c_n z_0^{n-1}.$$

を示す．

11.3 Step 1.

微分係数 $f'(z_0)$ の定義から，

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

を得る, よって, 任意に $\epsilon > 0$ をとれば, 正数 ${}^{\exists}\rho_0$ が存在し, $0 < |z-z_0| < \rho_0$ なる $\alpha z \in K$ に対し,

$$|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)| < \epsilon$$

が成立する．

一方，冪級数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ は K で収束するので，特に，$z_0 \in K$ でも収束する，即ち，次を得る．

$$f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n < \infty.$$

11.4 Step 2.

$0 < |z_1 - z_0| < \rho_0$ なる，$z_1 \in K$ を一つ取り，$d := |z_1 - z_0| > 0$ とおく．最初に，

$$f(z_1) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z_1^n - z_0^n)$$

を示そう．

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \lim_{n\to\infty} P_n(z),$$

と表わせる．但し，

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} c_k z^k \text{（第 } n \text{ 項までの和）}$$

.

従って，$z = z_1$ と置くと，上記の $\epsilon > 0$ に対して，番号 N_1 があって（この N は z_1 に依存するかもしれないので N_1 とわざわざ書いた)，${}^\forall n \geq N_1$ に対し，

$$(*) \quad |f(z_1) - P_n(z_1)| = |f(z_1) - \sum_{k=1}^{n} c_k z_1^k| = |\sum_{m\geq n+1} c_m z_1^m| < \epsilon$$

同様に $z_0 \in K$ に対しても，正の数 ${}^\exists N_0 \in \mathbb{N}$ があって，$\alpha n \geq N_0$ に対し

$$(**) \quad |f(z_0) - P_n(z_0)| = |f(z_0) - \sum_{k=1}^{n} c_k z_0^k| = |\sum_{m\geq n+1} c_m z_0^m \ | < \epsilon$$

を得る．ここで，$N = \max\{N_0, N_1\}$ とおくと，${}^\forall n \geq N$ に対して，$(*), (**)$ が成り立つとしてよい．

さて，$f(z_1)$ の第一項は c_0 で $f(z_0)$ の第一項も同じく c_0 なので，$n \geq N$ なる任意の n について，

$$\begin{aligned} & \left| f(z_1) - f(z_0) - \Big(P_n(z_1) - P_n(z_0) \Big) \right| \\ = & \left| f(z_1) - f(z_0) - \Big(\sum_{k=1}^{n} c_k (z_1^k - z_0^k) \Big) \right| \\ \leq & \left| f(z_1) - \sum_{k=0}^{n} c_k z_1^k \right| + \left| f(z_0) - \sum_{k=0}^{n} c_k z_0^k \right| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \end{aligned}$$

よって，

$$f(z_1) - f(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (z_1^n - z_0^n)$$

を得る．

11.5 (Step 3.)

さて，$d = |z_1 - z_0| > 0$ であった，そこで，改めて $(*), (**)$ の ϵ を $|z_1 - z_0|\epsilon = d\epsilon$ で置き換えて考えても問題ない，つまり，

$$
\begin{aligned}
|f(z_1) - P_n(z_1)| < |z_1 - z_0|\epsilon = d\epsilon \cdots (*)' \\
|f(z_0) - P_n(z_0)| < |z_1 - z_0|\epsilon = d\epsilon \cdots\ (**)'
\end{aligned}
$$

としてよい．$(*)', (**)'$ の両辺を $|z_1 - z_0|$ で割って，

$$
\Big|\frac{f(z_1) - P_n(z_1)}{z_1 - z_0}\Big| < \epsilon, \qquad \Big|\frac{f(z_0) - P_n(z_0)}{z - z_0}\Big| < \epsilon
$$

を得る．こうして，

$$
\begin{aligned}
& \Big|\frac{f(z_1) - f(z_0)}{z_1 - z_0} - \frac{P_n(z_1) - P_n(z_0)}{z_1 - z_0}\Big| \\
= & \Big|\frac{f(z_1) - P_n(z_1)}{z_1 - z_0} - \frac{f(z_0) - P_n(z_0)}{z_1 - z_0}\Big| \\
\leq & \Big|\frac{f(z_1) - P_n(z_1)}{z_1 - z_0}\Big| + \Big|\frac{f(z_0) - P_n(z_0)}{z_1 - z_0}\Big| < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon
\end{aligned}
$$

問題 11.1. 次が成立する事も上の証明から分かる．

$$
\begin{aligned}
\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{n\to\infty} \frac{P_n(z) - P_n(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k(z^k - z_0^k)}{z - z_0} \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k=1}^{n} (\sum_{j=0}^{k-1} c_j z^j z_0^{k-1-j})\Big)
\end{aligned}
$$

各自証明せよ．

11.6 (Step 4.)

証明の最終段階に来た．容易に

$$
\begin{aligned}
&\left|f'(z_0)-\sum_{k=1}^{n}kc_kz_0^{k-1}\right| \\
=\ & \left|f'(z_0)-\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}-\frac{P_n(z_1)-P_n(z_0)}{z_1-z_0}\right. \\
+\ & \left.\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}+\frac{P_n(z_1)-P_n(z_0)}{z_1-z_0}-\sum_{k=1}^{n}kc_kz_0^{k-1}\right| \\
\leq\ & \left|f'(z_0)-\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}\right| \\
+\ & \left|\frac{f(z_1)-f(z_0)}{z_1-z_0}-\frac{P_n(z_1)-P_n(z_0)}{z_1-z_0}\right| \\
+\ & \left|\frac{P_n(z_1)-P_n(z_0)}{z_1-z_0}-\sum_{k=1}^{n}kc_kz_0^{k-1}\right| \\
<\ & 2\epsilon+\left|\frac{P_n(z_1)-P_n(z_0)}{z_1-z_0}-\sum_{k=1}^{n}kc_kz_0^{k-1}\right| \cdots(***)
\end{aligned}
$$

を得る．今，

$$\lim_{z\to z_0}\frac{P_n(z)-P_n(z_0)}{z-z_0}=P_n'(z_0)=\sum_{k=1}kc_kz_0^k$$

よって，上記の $\epsilon>0$ に対して，正数 $\delta_1>0$ が存在して，
$0<|z-z_0|<\delta_1$ をみたす全ての $z\in K$ に対して，

$$|\frac{P_n(z)-P_n(z_0)}{z-z_0}-\sum_{k=1}kc_kz_0^k|<\epsilon$$

が成立する．そこで，$\delta:=\min\{\delta_0.\ \delta_1\}$ とおくと，$0<|z-z_0|<\delta$ を満たす全ての $z\in K$ に対して上の不等式が成立する．そこで，最初に選んだ $z_1\in K$ を $|z_1-z_0|<\rho$ となるように取り替えると．この $z=z_1$ について，

$$|\frac{P_n(z_1)-P_n(z_0)}{z_1-z_0}-\sum_{k=1}kc_kz_0^k|<\epsilon$$

を得る．こうして，$(***)$ より，最終的に，$\alpha n\geq N$ なる任意の n について，

$$\left|f'(z_0)-\sum_{k=1}^{n}kc_kz_0^{k-1}\right|<3\epsilon$$

を得る．換言すれば,

$$f'(z_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} kc_k z_0^{k-1}$$

$z_0 \in K$ は任意に選んだので，記号を入れ替え次を得る．

$$f'(z) \quad = \quad \Big(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\Big)' = \sum_{n=0}^{\infty} \big(c_n z^n\big)' = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} kc_k z^{n-1}$$

以上で，解析関数は正則関数であることが示された（長い話になった！）逆の主張はコーシーの積分定理から導かれる積分公式を用いて示されるが，それは次回に譲ろう． □

<u>問題</u> **11.2.** コンパクト集合 $K = \{|z| \le r\}$ 上で正則な関数列 $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ が次の条件を満たすとする．

(i) 各 $z \in K$ に対して，$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = f(z)$ は収束する（各点収束）

(ii) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(z) = g(z)$ は K 上<u>一様収束する</u>.

その時,

$$f'(z) = g(z)$$

が成立することを，上述の証明を参考にして証明せよ．

即ち，$^\forall z \in K$ に対して,

$$\frac{d}{dz}\Big(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(f_n(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{df_n}{dz}(z)$$

が成立する．但し，正則関数 $f_n'(z)$ は連続であるという事実は用いてよい．要するに微分演算は $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ の中に入れることが出来る．

「解析概論（高木貞治・岩波書店）」の *pp.157–161* を参考にせよ．

12 コーシーの積分公式

<u>定理</u> **12.1.** $f(z)$ を単純閉曲線 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ で囲まれた閉領域で正則な関数とする．C がこの領域の外側の境界ならば

$$\int_C f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z)\, dz$$

が成り立つ．

Proof. n に関する帰納法で示す． まず，$n=1$ のときは，C 上に点 P, P_1 をとり C_1 上に点 Q, Q_1 をそれぞれ取り，P と Q （P_1 と Q_1 を滑らかな曲線 Γ_0 および Γ_1 で結ぶ．そのとき，曲線 C は正の向きに $C(PP_1)$,$C(P_1P)$ の部分に分かれ，曲線 C_1 は正の向きに $C_1(QQ_1)$,$C_1(Q_1Q)$ に分かれる．
C と C_1 で囲まれた領域は

$$C^{(0)} : C(PP_1), \Gamma_1, -C_1(QQ_1) - \Gamma_0$$

で囲まれた部分と

$$C^{(1)} : C(P_1P), \Gamma_0, -C_1(Q_1Q) - \Gamma_1$$

で囲まれた部分に分かれる．
今，

$$\begin{aligned} 0 = \int_{C^{(0)}} f(z)\,dz &= \int_{C(PP_1)} + \int_{\Gamma_1} - \int_{C_1(QQ_1)} - \int_{\Gamma_0} \\ 0 = \int_{C^{(1)}} f(z)\,dz &= \int_{C(P_1P)} + \int_{\Gamma_1} - \int_{C_1(Q_1Q)} - \int_{\Gamma_1} \end{aligned}$$

ゆえ，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C^{(0)}} + \int_{C^{(1)}} \\ &= \int_{C(PP_1)} + \int_{C(P_1P)} - \int_{C_1(QQ_1)} - \int_{C_1(Q_1Q)} \end{aligned}$$

こうして，

$$\begin{aligned} \int_C &= \int_{C(PP_1)} + \int_{C(P_1P)} \\ &= \int_{C_1(QQ_1)} + \int_{C_1(Q_1Q)} \\ &= \int_{C_1} \end{aligned}$$

を得る．
次に，$n \leqq N-1$ に対して結果は正しいと仮定する（帰納法の仮定）．$n=N$ のときは C_N と $C_1, \ldots, C_{N-1}$ に分ける．C と C_N を互いに交わらない滑らかな
曲線 Γ_0 および Γ_N で結ぶと，$C, C_1, \ldots, C_N$ で囲まれる部分は

$$C^{(0)} : C(PP_1), \Gamma_N, -C_1(QQ_1) - \Gamma_0$$

で囲まれた部分と

$$C^{(N-1)} : C(P_1P), \Gamma_0, -C_1(Q_1Q) - \Gamma_N$$

で囲まれた部分に分かれる．$C^{(1)}$ と $C_1, \dots, C_{N-1}$ で囲まれた部分に対して帰納法の仮定および (i) を適用して，

$$\int_C f(z)\,d\,z = \int_{C_N} f(z)\,d\,z + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{C_n} f(z)\,d\,z$$

を得る． □

定理 12.2. 複素関数 $f(z)$ は開円板 $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-\alpha| < r\}$ で正則で閉円板 $\overline{\Delta}$ で連続とする．Δ の境界を $C = \partial\Delta : z = \alpha + re^{it} \ \ (0 \le t \le 2\pi)$ とおく．このとき，

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta$$

Proof. 任意の $0 < \epsilon < r$ に対して，

$$f(z) = \frac{f(z)}{z-\alpha}$$

は，円環領域

$$\Delta_\epsilon : \{z \in \mathbb{C} \ : \ \epsilon < |z-\alpha| < r\}$$

で正則で，

$$\overline{\Delta_\epsilon} : \{z \in \mathbb{C} \ : \ \epsilon \leqq |z-\alpha| \leqq r\}$$

で連続であるから，$C_\epsilon = \{|z-\alpha| = \epsilon\}$ と置くと，定理 1 より，

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta = \int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta$$

を得る．

次に，右辺の $\displaystyle\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta$ を具体的に計算しよう．まず，C_ϵ を極形式で，$\zeta = \alpha + \epsilon e^{it}$ $(0 \le t \le 2\pi)$ と表す．そのとき，

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha} d\zeta = i \int_0^{2\pi} f(\alpha + \epsilon e^{it}) dt.$$

被積分項は

$$|f(\alpha+\epsilon e^{it})| \le \max_{z \in \overline{\Delta}} |f(z)| = M(\Delta) < +\infty$$

より，有界である．従って，両辺で $\epsilon \to 0$ とすると，右辺は ϵ に無関係であるから，

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - \alpha} d\zeta = i \int_0^{2\pi} f(\alpha + \epsilon e^{it}) dt \to 2\pi i f(\alpha) \text{ (as } \epsilon \to 0).$$

こうして，定理の証明は終わる． □

定理 12.3 (コーシーの積分公式). $f(z)$ を単純閉曲線 C およびその内部において正則な関数とする．C の内部 $D = [C]$ の一点 $z \in D$ において，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

が成り立つ．

Proof. $z \in D$ 中心，半径 $\delta > 0$ の円周 C_δ を D の完全内部にあるように $\delta > 0$ を選ぶ．$f(z)$ は $D - [C_\delta]$ で正則ゆえ，定理 7 より，

$$\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

今，

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta \right|$$

を得るが，$f(z)$ の連続性から，任意の $\epsilon > 0$ に対し，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$\alpha\zeta \in C_\delta$ に対し，$|\zeta - z| \leqq \delta$ ならば，$|f(\zeta) - f(z)| < \epsilon$ とできる．よって，

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \, d\zeta \right| &\leqq \frac{1}{2\pi} \int_{C_\delta} \left| \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} \right| |d\, z| \\ &< \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\epsilon}{\delta} \cdot \int_{C_\delta} |d\, z| = \epsilon. \end{aligned}$$

よって，$\delta \to 0$ として，

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\delta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\, z = f(z).$$

□

注意 12.1. $f(z)$ を単純閉曲線 $C, C_1, C_2, \ldots, C_n$ で囲まれた閉領域 $\overline{D}$ で正則な関数とする．定理 *2* の証明から，C がこの領域の外側の境界ならば，即ち，

$$\partial D = C - C_1 - C_2 - \cdots - C_n$$

のとき，$\alpha z \in D$ に対し，

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta$$

が成り立つ．

<u>定理</u> **12.4** (モレラの定理)**.** $f(z)$ を単連結領域 $D \subset \mathbb{C}$ で連続な関数とする．D 内の任意の単純閉屈折線 C に対して，

$$\int_C f(z)\, dz = 0$$

ならば，$f(z)$ は D で正則である．

Proof. D 内の 1 点 $\alpha \in D$ を固定する．α から z に至る屈折線を Γ とする．そのとき，線積分 $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\, dz$ は Γ の取り方に依らない．

($\because$) Γ' を Γ と交わらない α から z に至る単純屈折線（自分自身と交わらない屈折線）とする．$C = \Gamma - \Gamma'$ は単純閉曲線で D が単連結なので C の内部は D の点からなる．故に，コーシーの積分定理から

$$0 = \int_C f(z)\, dz = \int_{\Gamma - \Gamma'} f(z)\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz - \int_{\Gamma'} f(z)\, dz$$

よって，

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{\Gamma'} f(z)\, dz.$$

今，Γ と Γ' が交わる時は Γ'' として Γ と Γ' と交わらない単純屈折線とする．そのとき，Γ と Γ' と Γ' と Γ'' について同様の議論から

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = \int_{\Gamma''} f(z)\, dz = \int_{\Gamma'} f(z)\, dz$$

を得る．$\int_\Gamma f(z)\, dz$ は α と z を結ぶ屈折線の取り方に依らないで，z だけで決まるので，

$$F(z) = \int_\Gamma f(z)\, dz$$

で表す．命題 3.3 の証明より，$F'(z) = f(z)$ を満たす．これは，$F(z)$ が複素微分可能（正則）を示している． □

13　正則性と解析性

$f(z)$ は $\overline{\Delta} = \{z \in \mathbb{C} \quad |z-\alpha| \leq r\}$ で正則な関数とする．$z \in \Delta$ を任意にとる．$C = \partial\Delta$（正の向き）とおく．

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)-(z-\alpha)}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\cdot\frac{1}{1-(\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha})}d\zeta \end{aligned}$$

さて，$|\zeta-\alpha| > |z-\alpha|$ より　$|\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}| < 1$ である．無限等比級数の収束（公比が 1 より小さい）条件より，次の級数は $|\zeta - a| = r$ を満たす任意の ζ に対して絶対収束する．一方，C はコンパクトゆえ，この収束は一様収束である．

実際,

$$|\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}| = |\frac{z-\alpha}{r}| < 1$$

であり，右辺は ζ には無関係で,

$$\frac{1}{1-\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}} = \sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\Big)^n \ < \ \infty$$

より,

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}$ は $\displaystyle\int_C$ の外に出す事ができる（項別積分可能）．故に,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\cdot\frac{1}{1-(\dfrac{z-\alpha}{\zeta-\alpha})}d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-\alpha}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(\frac{z-\alpha}{\zeta-\alpha}\Big)^n d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \Big[\sum_{n=0}^{\infty}(z-\alpha)^n\frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}\Big]d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\Big\{\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta\Big\}(z-\alpha)^n. \end{aligned}$$

そこで,

$$c_n := \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\alpha)^{n+1}}d\zeta \ \ (n \geq 0)$$

とおくと，最終的に，$|z-a|<r$ を満たす z に対し，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n$$

と表すことができる．

__補題__ **13.1.** $f(z)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-\alpha)^n$ の収束半径と $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-\alpha)^{n-1}$ の収束半径は同じである．

Proof.

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n|c_n|}=\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=1\cdot\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}=\frac{1}{R}$$

が成立するから． □

前に示したように，

$$f'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}nc_n(z-\alpha)^{n-1}$$

であるから，これを繰り返すと，実は $f(z)$ は無限回微分可能であり，任意の p に対し p 回微分 $f^{(p)}(z)$ もまた，同じ収束円で正則が分る．よって，テーラー展開に関する基本的な事実から

$$c_n=\frac{1}{n!}\frac{d^nf}{dz^n}(a)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

ただし，$f^{(n)}(z)$ は $f(z)$ の n 階導関数を表す．即ち，

__定理__ **13.1.** $z=a$ で正則な関数は $z=a$ で解析的である．解析関数は正則であったので，$f(z)$ が $z=a$ で正則であるための必要十分条件は $f(z)$ が $z=a$ で解析的であることである．とくに，正則関数の導関数は正則である．

__定理__ **13.2.** $f(z)$ が $\{|z-\alpha|\leqq\rho\}$ で正則な関数とする．その時 $\{|z-\alpha|<\rho\}$ なる z に対して，

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}\,d\zeta$$

が成立する．

Proof. $n=1$ の時を示せば，後は帰納法で示せる．

$$C_\rho = \{|z-\alpha| = \rho\}$$

とおく．

$$\begin{aligned} f(z) - f(z') &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_1}\right)f(\zeta)\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{(z-z_1)f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_1)}\,d\zeta \end{aligned}$$

よって，

$$\frac{f(z)-f(z')}{z-z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_1)}\,d\zeta$$

よって，

$$f'(z_1) = \lim_{z\to z_1}\frac{f(z)-f(z')}{z-z_1} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_1)^2}\,d\zeta.$$

□

命題 13.1. $f(z,\zeta)$ は $\{|z| \leqq r\} \times \{|\zeta| = \rho\}$ 上定義された関数で

(1) $f(z,\zeta)$ は ζ を固定したとき，z の関数として $|z| <\leqq r$ で連続かつ $|z| < r$ で正則である．

(2) $f(z,\zeta)$ は z を固定したとき, ζ の関数として $|\zeta| = \rho$ 上で連続である．

(3) $|f(z,\zeta)| \leqq M$ が $\{|z| \leqq r\} \times \{|\zeta| = \rho\}$ で成り立つ．但し，M は定数である．

『この条件は $f(z,\zeta)$ が $\{|z| \leqq r\} \times \{|\zeta| = \rho\}$ で連続ならば満たされる』.

を満たすとき，

$$\varphi(z) = \int_{|\zeta|=\rho} f(z,\zeta)\,d\zeta$$

で定義される関数 $\varphi(z)$ は $|z| < r$ で正則である．

Proof. $|\zeta| = \rho$ なる ζ を固定する．そのとき，$f(z,\zeta)$ は

$$f(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f(w,\zeta)}{w-z}\,dw$$

と表される．

$$\begin{aligned}\varphi(z) &= \int_{|\zeta|=\rho} f(z,\zeta)\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho}\left(\int_{|w|=r}\frac{f(w,\zeta)}{w-z}\,d\,w\right)d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{1}{w-z}\left(\int_{|\zeta|=\rho} f(w,\zeta)\,d\,\zeta\right)dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{\varphi(w)}{w-z}\,dw\end{aligned}$$

そのとき，

$$\begin{aligned}&\frac{\varphi(z+h)-\varphi(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{\varphi(w)}{(w-z)^2}\,dw \\ =\ & \frac{1}{2\pi i\,h}\int_{|w|=r}\left(\frac{1}{w-z-h}-\frac{1}{w-z}-\frac{h}{(w-z)^2}\right)\varphi(w)\,dw \\ =\ & \frac{h}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{\varphi(w)}{(w-z-h)(w-z)^2}\,dw\end{aligned}$$

$h\to 0$ とすれば，$\varphi(z)$ は $|z|<r$ で複素微分可能（正則関数）で，

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{\varphi(w)}{(w-z)^2}\,dw$$

を満たす事が分かる． $\square$

注意 13.1. ζ を固定すれば

$$f(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f(w,\zeta)}{w-z}\,d\,w$$

であったので，命題 *1* より，

$$f_z(z,\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{f(w,\zeta)}{(w-z)^2}\,dw$$

が存在する事が分かる．そのとき，$f_z(z,\zeta)$ の $\{|z|<r\}\times\{|\zeta|=\rho\}$ での連続性も分かる．よって，

$$\begin{aligned}\varphi'(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{\varphi(w)}{(w-z)^2}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|w|=r}\frac{dw}{(w-z)^2}\int_{|\zeta|=\rho} f(w,\zeta)\,d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=\rho} d\zeta\int_{|w|=r}\frac{f(w,\zeta)}{(w-z)^2}\,dw \\ &= \int_{|\zeta|=\rho} f_z(z,\zeta)\,d\zeta\end{aligned}$$

14 正則関数の一般的性質

14.1 Cauchy の評価式とその応用

$f(z)$ を $z = a$ 中心，半径 $R > 0$ の開円板 $\Delta(a; R)$ で正則かつ境界 $C : \{z \in \mathbb{C} \ ; \ |z-a| = R\}$ で連続とする．このとき，$|z-a| < R$ をみたす αz に対し，

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \ (z-a)^n \end{aligned}$$

は絶対収束し，$0 < \rho < R$ なる任意の $\rho > 0$ に対し，閉円板 $\overline{\Delta}(a; \rho)$ 上で一様収束した．但し，

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta) \ d\zeta}{(\zeta - a)^{n+1}} \ .$$

そのとき，$f(z)$ はコンパクト集合 C 上で連続だから，最大値

$$M(\rho) = \max_{|\zeta - a| = \rho} |f(\zeta)|$$

とおくと

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_C \frac{f(\zeta) \ d\zeta}{(\zeta-a)^{n+1}}\right| \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - a|^{n+1}}|dz| \\ &\leqq \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{M(\rho)}{\rho^{n+1}}|dz| \\ &= \frac{M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}}\int_C |dz| \\ &= \frac{M(\rho)}{2\pi\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho \\ &= \frac{M(\rho)}{\rho^n} \end{aligned}$$

この時，

定理 14.1 (Liouville の定理). $f(z)$ を全平面で正則かつ有界な関数とする（即ち，$|f(z)| < K$ が全ての z に対して成立する）その時，$f(z)$ は定数関数である．

Proof. $f(z)$ は有界だから，正の定数 $K>0$ が存在し，$|f(z)| \leqq K$ が全ての $z \in \mathbb{C}$ に対して成立する．任意の $\epsilon > 0$ に対して, 正の実数 $R > \sqrt[n]{\dfrac{K}{\epsilon}}$ となるように選ぶ．この $R>0$ に対して，$f(z)$ は $\overline{\Delta(0;R)}$ で正則だから，この閉円板上で $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とテーラー展開できる．Cauchy の評価式より，

$$|c_n| \leqq \frac{K}{R^n} < K \cdot \frac{\epsilon}{K} < \epsilon \ \ (n \geqq 1)$$

よって，$n \geqq 1$ に対して，$c_n = 0$. 即ち，$f(z) = c_0$（定数）が $|z| < \infty$ について言える． □

定理 14.2 (代数学の基本定理)**.** 複素数を係数にもつ代数方程式

$$z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = 0$$

は複素数の範囲で解をもつ．即ち，

$$f(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

とおいたとき，$f(z)$ の零点集合について，

$$\{z \in \mathbb{C} \ : \ f(z) = 0\} \neq \emptyset$$

である．

Proof. 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し，$f(z) \neq 0$ とする. そこで，$g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ とおく．

(1) $g(z) := \dfrac{1}{f(z)}$ は $\mathbb{C}$ 上の正則関数である．

($\because$)
$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0 \quad より \quad \frac{\partial g}{\partial \overline{z}} = -\frac{1}{(f(z))^2} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

(2) $|f(z)| \geqq |z^n| - (|a_1|\,|z|^{n-1} + |a_2|\,|z|^{n-2} + \cdots + |a_n|)$.

($\because$) 容易に次が分かる．

$$\left|z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right| \geqq |z^n| - \left|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right|$$
$$\left|a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right| \leqq \left|a_1 z^{n-1}\right| + \left|a_2 z^{n-2}\right| + \cdots + |a_n|$$

よって，

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n\right| \\ &\geqq |z^n| - \Big(|a_1|\,|z|^{n-1} + \\ &+ |a_2|\,|z|^{n-2} + \cdots + |a_n|\Big) \end{aligned}$$

(3) $A = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_n|\}$ とおくとき, $\underline{A > 0}$ であり, $|f(z)| > |z|^n - A\dfrac{|z|^n - 1}{|z| - 1}$ が成り立つ.

$(\because)$ $A = 0$ なら, $a_1 = \cdots = a_n = 0$. よって,

$$f(z) = z^n \Longrightarrow f(0) = 0$$

ゆえ, $f(z) \neq 0$ に反する. こうして, $A \neq 0$ となる. $A \geqq |a_i|$ $(1 \leqq i \leqq n)$ より,

$$\begin{aligned} |f(z)| &\geqq |z^n| - (|a_1|\,|z|^{n-1} + |a_2|\,|z|^{n-2} + \cdots + |a_n|) \\ &\geqq |z^n| - A(|z|^{n-1} + |z|^{n-2} + \cdots + 1) \\ &\geqq |z^n| - A\frac{|z^n| - 1}{|z| - 1} = |z^n| - A\frac{|z^n| - 1}{|z| - 1} \end{aligned}$$

(4) $R > 1 + 2A$ なる $R > 0$ に対し. $|z| > R$ を満たす任意の z に対し, $|f(z)| > \dfrac{1}{2}|z|^n > \dfrac{1}{2}R^n$ が成立する.

$(\because)$ $|z| > R = 1 + 2A > 1$ より,

$$\begin{aligned} |z^n| - A\frac{|z^n| - 1}{|z| - 1} &> |z|^n - A\frac{|z|^n}{|z| - 1} \\ &= (1 - \frac{A}{|z| - 1})|z|^n \\ &> \frac{1}{2}|z|^n > \frac{1}{2}R^n. \end{aligned}$$

(5) $|z| \leq R$ に対して, $m_0 := \min\limits_{|z| \leq R} |f(z)| > 0$ である.

(6) $\dfrac{1}{M} = \min\left\{m_0\ ,\ \dfrac{1}{2}R^n\right\} > 0$ とおくと, 全ての $z \in \mathbb{C}$ に対して, $|f(z)| > \dfrac{1}{M}$ がなりたつ. よって, 任意の $z \in \mathbb{C}$ に対し, $|g(z)| < M$ を得る.

上記の (7) およびリューヴィルの定理より, $g(z)$ は非ゼロ定数関数である. 従って $\dfrac{1}{g(z)} = f(z)$ も非ゼロ定数関数である. しかし, これは不都合である. 以上より, $f(z) = 0$ は少なくとも 1 つ解を持つ. 因数定理と代数学の基本定理を繰り返し適用して, n 次の代数方程式は重複を許して丁度 n 個の解を持つ事がわかる. $\square$

14.2　一致の定理

<u>定理</u> **14.3.** $f(z)$ は領域 D で正則とする．$a \in D$ に収束する D 内の点列

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty},\ (z_n \neq a)$$

に対して，$f(z_n) = 0\ (n = 1, 2, \ldots)$ が成立しているならば，D 上 $f(z) \equiv 0$ である．

Proof. $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(a) = 0$. $f(z)$ は $z = a$ で正則だから，a 中心の開円板 $\Delta(a, r)$ で収束する級数

$$f(z) = c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots + c_n(z-a)^n + \cdots$$

に展開できる．

$$k = \min\{m :\ |c_m \neq 0\}$$

とおく．

<u>主張</u> **14.1.** $k = \infty$. 従って，任意の $k \geq 1$ に対して $c_k = 0,$ 即ち，$\Delta(a, r)$ 上 $f(z) \equiv 0$ である．

実際，$k < \infty$（有限）と仮定して矛盾を導く．

$$f(z) = (z-a)^k \{c_k + c_{k+1}(z-a) + \cdots + c_{k+m}(z-a)^m + \cdots\}$$

$\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + \cdots + c_{k+m}(z-a)^m + \cdots$ とおく．$\varphi(a) = c_k$ かつ $0 < |z-a| < r$ を満たす任意の z に対して $\varphi(z)$ は収束する事がわかる．実際，左辺の $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{(z-a)^k}$. よって，$\varphi(z) = c_k + c_{k+1}(z-a) + \cdots + c_{k+m}(z-a)^m + \cdots$ は $z = a$ でのテーラー展開である．従って，$\Delta(a, r)$ で正則である．$0 = f(z_n) = (z_n - a)^k \varphi(z_n)$ であり $z_n \neq a$ ゆえ，$\varphi(z_n) = 0$. よって，$\lim_{n\to\infty} \varphi(z_n) = \varphi(a) = 0.$ 一方，$\varphi(a) = c_k \neq 0$ ゆえ，矛盾が生ずる．こうして，$k = \infty$，即ち，任意の $c_k = 0\ (k = 1, 2, \cdots,)$. 故に，$\Delta(a, r)$ で $f(z) \equiv 0$.

<u>主張</u> **14.2.** 任意の ${}^{\forall}b \in D$ に対し，$f(b) = 0$ を示す．さすれば D 上 $f(z) \equiv 0$ であるという結論を得る．

($\because$) D は連結だから弧状連結である．よって，a と b は D 内の連続な曲線 C で結べる．C と D の境界 ∂D との最小距離を $d > 0$ とする．C 上に分点 $\{w_0 = a, w_1, \cdots, w_N = b\}$ を次を満たすように取る：

(1) $f(z)$ は $\Delta(w_k, r_k)$: $|z - w_k| < r_k < d$ で収束する級数に展開できる．

(2) $C \cap \Delta(w_k, r_k) \cap \Delta(w_{k+1}, r_{k+1}) \neq \emptyset$ $(0 \le k \le N)$.

(3) $w_{k+1} \in \partial\Delta(w_k, r_k) \cap C$

(4) $C \subset \displaystyle\bigcup_{k=0}^{N} \Delta(w_k, r_k)$.

今，$\Delta(w_k, r_k)$ 上で $f(z) \equiv 0$ と仮定する．点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ を

$$\lim_{n\to\infty} z_n = w_{k+1} \ (z_n \neq w_{k+1})$$

かつ

$$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset C \cap \Delta(w_k, r_k) \cap \Delta(w_{k+1}, r_{k+1})$$

を満たすように取る事ができる．仮定から $f(z_n) = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ ゆえ，$\Delta(w_{k+1}, r_{k+1})$ 上 $f(z) \equiv 0$ が成立する．従って，帰納法により，$f(z) \equiv 0$ が $\Delta(b, r_N)$ で成立する事が分る．従って，$f(b) = 0$，即ち，D 上 $f(z) \equiv 0$ が示された． □

<u>系</u> **14.1.** 領域 D で<u>定数でない</u>正則関数 $f(z)$ の零点集合

$$A := \{z \in D \ : \ f(z) = 0\}$$

は空集合でなければ，孤立点からなる．即ち，任意の $a \in A$ に対して，近傍 $\Delta(a, \rho)$ が存在して，

$$\Delta(a, \rho) \cap (A - \{a\}) = \emptyset$$

換言すれば，もし $f(a) = 0$ ならば，$\rho > 0$ があって，$0 < |z - a| < \rho$ 上 $f(z) \neq 0$ が成立する．特に，$\rho > 0$ を少し小さく取る事により，$|z - a| = \rho$ 上 $f(z) \neq 0$ とできる．

Proof. まず，A は閉集合である．実際，正則関数 $f(z)$ を写像 $f : D \longrightarrow C$ とみれば連続写像である．一点 $0 \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．従って，閉集合の連続写像による逆像 $A = f^{-1}(0)$ は閉集合である．よって，A の集積点は A に含まれる．

A が集積点 a を持つとすると，A は閉集合だから $a \in A$ かつ任意の $^{\forall}\rho > 0$ に対して

$$\Delta(a, ^{\forall}\rho) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$$

が成立する．特に，$\rho > 0$ として，$\lim_{n\to\infty} \rho_n = 0$ なる単調減少列

$$\rho_1 > \rho_2 > \ldots > \rho_n > \cdots \to 0$$

をとれば,

$$^{\exists}z_n \in \Delta(a, {}^{\forall}\rho_n) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset \ (n = 1, 2, \cdots)$$

を得る．即ち, 点列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A - \{a\}$ で, $|z_n - a| < \rho_n \ (n \geq 1)$ を満たすものが存在する．特に, $\lim_{n\to\infty} z_n = a \ (z_n \neq a)$ を得る．$\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A - \{a\}$ より $f(z_n) = 0 \ (n \geq 1)$. 一致の定理より，D で $f(z) \equiv 0$ である．これは, $f(z)$ が定数でないという仮定に矛盾する．従って，零点集合 A は決して集積点を持たないので，孤立点ばかりからなる． □

14.3 開写像定理

<u>**定理**</u> **14.4** (開写像定理)**.** 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の領域 D で定義された正則関数 $f(z)$ を（正則）写像 $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ とみるとき, f は開写像である．即ち, 任意の開部分集合 $U \subset D$ に対してその像 $f(U)$ は $\mathbb{C}$ の開集合である．従って，$U \subset D$ が部分領域ならば $f(U)$ もまた領域である．

Proof. $^{\forall}w_0 \in f(U)$ をとる．このとき, $w_0 = f(z_0)$ となる $^{\exists}z_0 \in U$ がある．

♠ $f(U)$ が開集合である事を示すには w_0 のある近傍が $f(U)$ に含まれる事を言えばよい．

今, 正則関数 $f(z) - f(z_0) = f(z) - w_0$ は $z = z_0$ を零点に持つ．一致の定理より z_0 を中心とする半径 $\rho > 0$ の円周 $|z - z_0| = \rho$ 上で $f(z) - f(z_0) \neq 0$（決して零を取らない）とできる．そのとき,

$$d := \min_{|z-z_0|=\rho} |f(z) - f(z_0)| > 0$$

<u>**主張**</u> **14.3.** $w \notin f(U)$ & $|w - w_0| < d \Longrightarrow |w - w_0| \geq \frac{d}{2}$

これは

$$\Delta(w_0, \frac{d}{2}) := \left\{ w \ : \ |w - w_0| < \frac{d}{2} \right\} \subset f(U)$$

を意味する．即ち，$f(U)$ が w_0 の近傍 $\Delta(w_0, \frac{d}{2})$ を含む事を意味する．

<u>主張 3 の証明</u>

$w \notin f(U)$ より，$f(z) - w \neq 0$ が $|z - z_0| \leq^{\exists} \rho < d$ で成立する．よって, $g(z) := \dfrac{1}{f(z) - w} \neq 0$ は $|z - z_0| \leq \rho$ で正則．Cauchy の積分公式より,

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{g(z)}{z - z_0} \, dz.$$

一方．

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|w-w_0|} &= |g(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{|z-z_0|=\rho} \left|\frac{g(z)}{z-z_0}\right| \ |dz| \\
&= \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{|f(z)-w|}\,|dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{1}{|f(z)-w_0|-|w-w_0|}\ |dz| \\
&\leq \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{|dz|}{d-|w-w_0|}\ (\because |w-w_0|<d) \\
&= \frac{1}{d-|w-w_0|}\ \frac{1}{2\pi\rho}\int_{|z-z_0} |dz| \\
&= \frac{1}{d-|w-w_0|}
\end{aligned}
$$

故に，$|w-w_0| \geq \dfrac{d}{2}$ を得る． □

14.4 最大絶対値の定理

定理 14.5 (最大絶対値の定理)**.** 領域 $D \subset \mathbb{C}$ で定義された正則関数 $f(z)$ の絶対値 $|f(z)|$ が D の内点で最大値をとれば $f(z)$ は定数関数である．従って，定数でない正則関数は領域の内点で決して最大値を取らない．

Proof. $f(z)$ は定数関数ではないと仮定する．$f(z)$ が D の内点 $a \in D$ で最大絶対値 M をもつとうれば，$|f(a)| := M \geqq |f(z)|$ が全ての $z \in D$ に対して成立する．$f(z)$ は $z=a$ で正則だから，a 中心の閉円板 $\overline{\Delta(a,\rho)} \subset D$ があって，$f(z)$ は $\overline{\Delta(a,\rho)}$ で正則である．よって，

$$
f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k < \infty
$$

は $\overline{\Delta(a,\rho)}$ 上で絶対一様収束する．

ここで，

$$
\int_0^{2\pi} |f(a+\rho e^{it})|^2 \ dt = \frac{1}{\rho}\int_{|z-a|=\rho} |f(z)|^2 \ |dz| \leq 2\pi M^2
$$

を得る．一方，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}|f(a+\rho e^{it})|^2\,dt &= \int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{it})\cdot\overline{f(a+\rho e^{it})}\,dt\\ &= \sum_{k,\ell}^{\infty}\int_0^{2\pi} c_k\overline{c_\ell}\rho^{k+\ell}e^{i(k-\ell)t}\,dt\\ &= \sum_{k,\ell}^{\infty}\left\{c_k\overline{c_\ell}\rho^{k+\ell}\cdot\left(\int_0^{2\pi}e^{i(k-\ell)t}\,dt\right)\right\}\\ &= 2\pi\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\rho^{2k}\end{aligned}$$

$(\because)$

$$\int_0^{2\pi}e^{i(k-\ell)t}\,dt=\begin{cases}0 & k\neq\ell\\ 2\pi & k=\ell\end{cases}$$

ゆえ，

$$2\pi M^2=\int_0^{2\pi}M^2\,d\,t\geqq\int_0^{2\pi}\left|f(a+\rho e^{it})\right|^2\,d\,t=2\pi\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\rho^{2k}$$

を得る．こうして，最終的に

$$\sum_{k=0}^{\infty}|c_k|^2\rho^{2k}\leqq M^2\quad(\text{Gutzmer の不等式という})$$

を得る．ここで，$c_0=f(a)$ だから，$|c_0|=|f(a)|=M$．

$$|c_0|^2+\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\rho^{2k}=M^2+\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\rho^{2k}\leq M^2$$

こうして

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\rho^{2k}\leq 0$$

従って，$c_k=0\ (k\geq 1)$．即ち，$f(z)=c_0$ が $\Delta(a,\rho)$ で成立．一致の定理より $f(z)$ は領域 D で定数関数となり矛盾．以上より，$|f(z)|$ は定数でなければ D の内点で最大値を取らない．

<u>系</u> **14.2.** 閉領域 $\overline{D}$ で非定数な正則関数 $f(z)$ は D の境界 ∂D で最大値絶対値をとる．特に，

$$\max_{z\in D}|f(z)|=\max_{z\in\partial D}|f(z)|=|f(z_0)|\quad({}^{\exists}z_0\in\partial D)$$

かつ

$$|f(z)|<|f(z_0)|\quad({}^{\forall}z\in D).$$

□

14.5 シュワルツの定理

<u>**定理**</u> **14.6** (シュワルツの定理)**.** $f(z)$ は $|z| < R$ で正則, そこで $|f(z)| \leqq M$, かつ $f(0) = 0$ ならば,

$$|f(z)| \leqq \frac{M}{R}|z|, \ |z| < R.$$

また，$z \neq 0$ に対して等号が成立するのは

$$f(z) = \lambda \frac{M}{R} z \quad (|\lambda| = 1)$$

の時である．

Proof. $f(0) = 0$ より，$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n = z \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ とテーラー展開される．今，$\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{n-1}$ は $z = 0$ で正則である．故に,

$$F(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z} & \text{if} \quad z \neq 0 \\ c_1 & \text{if} \quad z = 0 \end{cases}$$

と定義すれば，$F(z)$ は $|z| < R$ で正則である．

$$|z| \leqq^{\forall} \rho < R$$

とすれば,

$$\max_{|z| \leqq \rho} |F(z)| = \max_{|z| = \rho} |F(z)|$$

が最大絶対値の定理より成立する．よって,

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| \leqq \max_{|z|=\rho} \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leqq \frac{M}{\rho}.$$

よって,

$$|f(z)| \leqq \frac{M}{\rho}|z|$$

$0 < \rho < R$ の任意性から $\rho \to R$ として結果が従う．

もし,

$$|f(z)| = \frac{M}{R}|z| \Longrightarrow |F(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{M}{R}$$

より，$\dfrac{f(z)}{z} = C$（定数）．よって,

$$|C| = \left| \frac{M}{R} \right| \Longrightarrow C = e^{i\theta} \frac{M}{R}$$

□

15　正則関数の特異点

15.1　ローラン展開

補題 15.1. $f(z)$ は $\{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < R_1 < |z-a| \leqq R_2\}$ で正則とする．任意の $R_1 < r < R_2$ に対して，$\displaystyle\int_{C_r} f(z)\,dz$ は r に無関係である．

Proof.

$$\begin{aligned}
\int_{C_r} f(z)\,dz &= \int_0^{2\pi} f(a+re^{it}) rie^{it}\,dt \\
&= i\int_0^{2\pi} g(a+re^{it})dt \\
&\quad \text{但し} \quad (g(z) = (z-a)f(z)) \\
\frac{d}{dr}\int_{C_r} f(z)\,dz &= i\int_0^{2\pi} g'(a+re^{it})e^{it}\,dt \\
&= \frac{1}{r}\int_0^{2\pi} \frac{d}{dt} g(a+re^{it})\,dt \\
&= \frac{1}{r}\{(g(a+r) - g(a+r)\} = 0
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\int_{C_r} f(z)\,dz$ は r に無関係である．　□

補題 15.2. $f(z)$ を円環領域 $\Omega := \{z \in \mathbb{C} \ : \ r_1 < |z-a| < r_2\}$ で正則な関数とする．$c \in \Omega$ とする．ρ_1, ρ_2 を $r_1 < \rho_1 < |c-a| < \rho_2 < r_2$ となるように選ぶ．そのとき，

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho_2} \frac{f(z)}{z-c}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho_1} \frac{f(z)}{z-c}\,dz$$

が成立する．

Proof. $g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(c)}{z-c}, & \text{if} \quad z \in \Omega,\ z \neq c \\ f'(c) \quad , & \text{if} \quad z = c \end{cases}$ 　とおくと，

$g(z)$ は Ω で正則な関数である．補題 9 より，

$$\int_{|z-a|=\rho_2} g(z)\,dz = \int_{|z-a|=\rho_1} g(z)\,dz.$$

$$\int_{|z-a|=\rho} \frac{dz}{z-c} = \begin{cases} 2\pi i\,, & \text{if} \quad |c-a| < \rho \\ 0\,, & \text{if} \quad |c-a| > \rho \end{cases}$$

より，

$$\begin{aligned}
\int_{|z-a|=\rho_2} g(z)\,dz &= \int_{|z-a|=\rho_2} \frac{f(z)-f(c)}{z-c}\,dz \\
&= \int_{|z-a|=\rho_2} \frac{f(z)}{z-c}\,dz - 2\pi i f(c) \\
\int_{|z-a|=\rho_1} g(z)\,dz &= \int_{|z-a|=\rho_1} \frac{f(z)-f(c)}{z-c}\,dz \\
&= \int_{|z-a|=\rho_1} \frac{f(z)}{z-c}\,dz - 0
\end{aligned}$$

よって，

$$\int_{|z-a|=\rho_2} \frac{f(z)}{z-c}\,dz - 2\pi i f(c) = \int_{|z-a|=\rho_1} \frac{f(z)}{z-c}\,dz.$$

□

定理 15.1. $f(z)$ を円環領域

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 \leqq r_1 < |z-a| < r_2 \leqq \infty\}$$

で正則な関数とする．そのとき，複素数列 $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 一意的に存在し，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

と表される．この級数は Ω の任意のコンパクト集合上で一様かつ絶対収束する．

Proof. $w \in \Omega$ とし，ρ_1, ρ_2 を $r_1 < \rho_1 < |w-a| < \rho_2 < r_2$ を満たすように選ぶ．$r_1 < r < r_2$ とし，

$$c_n := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz, \quad n \in \mathbb{Z}$$

とおく．補題 9 より c_n は r に依存しない．

(a) $|w-a| < \rho_2$, $|z-a| = \rho_2$ に対して，

$$\frac{1}{z-w} = \frac{1}{(z-a)-(w-a)} = \frac{1}{z-a} \cdot \frac{1}{1-\dfrac{w-a}{z-a}}.$$

一方，$\left|\dfrac{w-a}{z-a}\right| < 1$ ゆえ，

$$\frac{1}{1-\dfrac{w-a}{z-a}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n$$

と表される．よって，一様収束する級数

$$\frac{1}{z-w} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

を得る．こうして，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho_2}\frac{f(z)}{z-w}\,d\,z = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(w-a)^n \quad \cdots \quad (\mathrm{a}.1).$$

特に，　$r_1 < |w-a| < r_2$ をみたす任意の w に対し，(a.1) は収束するので，アーベルの定理より,$(a.1)$ は $|w-a| < \rho_2 < r_2$ で絶対一様収束する．

(b) $|w-a| > \rho_1$，$|z-a| = \rho_1$ に対して，同様に

$$\frac{1}{z-w} = -\frac{1}{w-a}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{z-a}{w-a}} = -\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(z-a)^m}{(w-a)^{m+1}}$$

も一様収束する．よって，

$$\begin{aligned}
&\int_{|z-a|=\rho_1}\frac{f(z)}{z-w}\,d\,z \\
=\ & -\sum_{m=0}^{\infty}(w-a)^{-m-1}\cdot\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho_1} f(z)(z-a)^m\,d\,z \\
=\ & -\sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1}\left(\frac{1}{w-a}\right)^{m+1} \quad \cdots \quad (\mathrm{b}.1) \\
=\ & -\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(w-a)^n \quad \bigl(n=-m-1 \text{ と置いた}\bigr)
\end{aligned}$$

特に，(b.1) は $|w-a| > \rho_1 > r_1$ なる任意の点 w で収束するので，アーベルの定理の証明から $|w-a| > \rho_1$ で絶対一様収束する事がわかる．

補題 9.2 より，

$$f(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(w-a)^n \quad \cdots \quad (*)$$

が成り立ち，(a), (b) より，$(*)$ は $\rho_1 < |w-a| < \rho_2$ で絶対一様収束する．

最後に一意的に $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が決まる事を示す．

$$f(z) = \sum_{n=-\infty} \lambda_n(z-a)^n \quad z \in \Omega.$$

とする．一様収束性から $r_1 < r < r_2$ に対し，

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-mit}\,dt &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda_n \int_0^{2\pi} r^n e^{i(n-m)t}\,dt \\ &= \lambda_m r^m\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}\lambda_m &= \frac{1}{r^m}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{-imt}\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}}\,dz \\ &= c_m.\end{aligned}$$

よって，一意性も示された． □

定義 15.1.

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n\ , \quad 0 < |z-a| < r$$

を $0 < |z-a| < r$ 上で定義された正則関数の $f(z)$ の $z = a$ 中心の **Laurent（ローラン）展開**という．

定義 15.2. 点 $z = a \in \mathbb{C}$ が正則関数 $f(z)$ の**特異点**であるとは，ある正の数 $r > 0$ があって，$f(z)$ が $0 < |z-a| < r$ で正則であるときをいう．従って，$f(z)$ が $z = a$ を特異点としてもてば，$f(z)$ は $z = a$ 中心とするローラン展開表示できる．

15.2 除去可能特異点

定理 15.2 (Riemann の拡張定理)**.** $a \in \mathbb{C}$ とし，$f(z)$ は $0 < |z-a| <^{\exists} r$ で正則な関数とする．そのとき，

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\neq a}} (z-a)f(z) = 0 \quad (\spadesuit)$$

ならば $|z-a|<r$ で正則な関数 $F(z)$ が存在して $F\big|_{0<|z-a|<r}=f$ とできる．この正則関数 $F(z)$ を $f(z)$ の $z=a$ での拡張という．条件 (♠) は $f(z)$ が $0<|z-a|<\delta<r$ で有界ならば満たされる．

Proof. $z=a$ 中心のローラン展開

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

は $r_1 \leqq |z-a| \leqq r_2 < r$ で絶対一様収束する．ここに，

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz \quad (0<\alpha\rho<r\ ,n\in\mathbb{Z})$$

今,$f(z)$ が $0<|z-a|<\rho$ で有界より $|f(z)|<M(\rho)$ が $0<|z-a|<\rho$ を満たす任意の z に対して成立する．

$$|c_n|=\left|\int_0^{2\pi}f(a+re^{it})\frac{1}{\rho^n\,e^{nit}}\,dt\right|\leqq\frac{M(\rho)}{\rho^n}$$

$n\leqq -1$ に対し，$\displaystyle\lim_{\rho\to 0}\frac{M(\rho)}{\rho^n}=0$ より，$c_n=0 \quad \text{for} \quad n\leqq -1$．よって，$0<|z-a|<r$ を満たす全ての z に対し，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$$

を得る．一方, この級数は $|z-a|<r$ でも広義一様収束するから $|z-a|<r$ で正則な関数 $F(z)$ を定める．特に，$F(z)=f(z)$ が $0<|z-a|<\rho$ で成立しているから，$f(z)$ は $f(a)=c_0$ と定義すれば $|z-a|<r$ で正則な関数 $F(z)$ に拡張できる． □

<u>**注意**</u> **15.1.** 定理 *20* をリーマンの除去可能特異点定理ということもある．即ち $f(z)$ が $0<|z-a|<r$ で正則で，$0<|z-a|<^{\forall}\rho<r$ で有界ならば $z=a$ は $f(z)$ の**除去可能な特異点 (Removable singularity)** という．$z=a$ が $f(z)$ の除去可能な特異点ならば $f(z)$ のローラン展開の負冪の項は全てゼロである．

ローラン展開を用いない別証明を紹介しよう．

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\neq a}}(z-a)f(z)=0$$

とする．そこで，$|z-a|<r$ 上の関数 $g(z)$ を

$$g(z)=\begin{cases}(z-a)^2f(z) & \text{if} \quad z\neq a\\ \ \ 0 & \text{if} \quad z=a\end{cases}$$

と定義すると

$$\lim_{\substack{\zeta\to a\\ \zeta\neq a}}\frac{g(\zeta)-g(a)}{\zeta-a}=\lim_{\substack{\zeta\to a\\ \zeta\neq a}}(\zeta-a)f(\zeta)=0$$

なので，$g(z)$ は $z=a$ で複素微分可能である．一方，明らかに $g(z)$ は $0<|z-a|<r$ で複素微分可能なので，結局, $g(z)$ は $|z-a|<r$ で正則である．$g(a)=g'(a)=0$ より，

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n=(z-a)^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}z^{n-2}.$$

よって，

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^{n-2}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{g^{(m+2)}(a)}{(m+2)!}(z-a)^m$$

が $0<|z-a|<\rho<r$ で成立する．アーベルの定理から $|z-a|<\rho$ で絶対一様収束する． □

15.3 極

$f(z)$ を $0<|z-a|<r$ で正則な関数とする．そのとき，$z=a$ 中心のローラン展開

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,\ \text{但し}$$

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz\quad(n\in\mathbb{Z})$$

できる．

定義 15.3. *(1).* $f(z)$ が特異点 $z=a$ で $N>0$ 位の**極 (pole)** を持つとは，$f(z)$ の $z=a$ でのローラン展開の $-(N+1)$ 以降の負冪の項が全てゼロであるとき，即ち，

$$c_{-(N+1)}=c_{-(N+2)}=\cdots=0.$$

即ち，

$$\begin{aligned}f(z)&=\frac{c_{-N}(\neq 0)}{(z-a)^N}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}\\&+\ c_0+c_1(z-a)+\cdots+c_n(z-a)^n+\cdots\end{aligned}$$

と表せる．N を $f(z)$ の $z=a$ での極の位数という．

$$-N = \mathrm{ord}_a(f)$$

と書く．

(2). $f(z)$ の $z=a$ でのローラン展開の係数 c_1 を $f(z)$ の $z=a$ での**留数**といい，$c_1 = \mathrm{Res}(f;a)$ と書く．

命題 15.1. $f(z)$ が $z=a$ で N 位の極をもつとき，$z=a$ は $(z-a)^N f(z)$ の除去可能な特異点である．

命題 15.2. $D \subset \mathbb{C}$ を単純閉曲線 C で囲まれた領域とする．即ち, $\partial D = C$. $a \in D$ をとる．$f(z)$ が $D - \{a\}$ で正則とする．そのとき,

$$\int_C f(z)\,d\,z = c_{-1} = \mathrm{Res}(f;a)$$

が成立する．

Proof. $D_\epsilon := D - \overline{\Delta}(a;\epsilon)$ とおく．$\partial D_\epsilon = C - C_\epsilon$, ここに $C_\epsilon = |z-a| = \epsilon$. $f(z)$ は領域 D_ϵ で正則ゆえ,

$$\int_C f(z)\,d\,z = \int_{C_\epsilon} f(z)\,d,z$$

$f(z)$ は $0 < |z-a| < \epsilon$ で正則ゆえ，ローラン展開

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

は $0 < \epsilon_1 < |z-a| < \epsilon$ で絶対一様収束する．$\epsilon_1 < \rho \leqq \epsilon$ に対して,

$$\oint_{|z-a|=\rho} (z-a)^n\,d\,z = \begin{cases} 2\pi i & \text{if} \quad n=-1 \\ 0 & \text{if} \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

を考慮に入れて，積分の交換性から

$$\begin{aligned}
\int_{C-C_\epsilon} f(z)\,d\,z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad & \int_C f(z)\,d\,z \\
= \quad & \int_{C_\epsilon} f(z)\,d\,z \\
= \quad & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \left(\oint_{|z-a|=\epsilon} \frac{1}{(z-a)^n}\,d\,z \right) \\
= \quad & 2\pi i \cdot c_{-1}.
\end{aligned}$$

故に,

$$c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)\,d\,z$$

□

系 15.1. $0 < |z-a| < r$ で正則な関数 $f(z)$ が $z=a$ で N 位の極を持つなら，

$$\mathrm{Res}(f;a) = \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\Big\{(z-a)^N f(z)\Big\}\Big|_{z=a}$$

Proof.
位数 $\mathrm{ord}_a(f) = -N$ ゆえ，

$$f(z) = \frac{C_{-N}}{(z-a)^N} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

と表せる．

$$\begin{aligned} g(z) &= (z-a)^N f(z) \\ &= c_{-N} + c_{-(N-1)}(z-a) + \cdots + c_{-1}(z-a)^{N-1} \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^{n+N} \end{aligned}$$

とおく．$g^{(N-1)}(z) = (N-1)!c_{-1} + h(z)$, 但し，$h(z)$ は $|z-a| < r$ で収束する冪級数として解析関数とくに正則関数である．特に，$h(a) = 0$. よって，$g^{(N-1)}(a) = (N-1)!c_{-1} = (N-1)!\,\mathrm{Res}(f;a)$ を得る．

$$\mathrm{Res}(f;a) = \frac{g^{(N-1)}(a)}{(N-1)!} = \frac{1}{(N-1)!}\frac{d^{N-1}}{dz^{N-1}}\Big\{(z-a)^N f(z)\Big\}\Big|_{z=a}$$

定理 15.3. $\Omega \subset \mathbb{C}$ を　単純閉曲線 C で囲まれた領域とし，$E := \{a_j\}_{j=1}^N \subset \Omega$ を孤立点集合とする．$f(z)$ が C 上連続かつ $\Omega - E$ で正則とし E の各点 a_j $(1 \leqq j \leqq N)$ で特異点を持つと仮定する．そのとき，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Res}(f;a_j)$$

Proof. $\epsilon_j > 0$ を $\Delta(a_j:\epsilon_j) \subset \Omega$ かつ $\Delta(a_j:\epsilon_j) \cap \Delta(a_k;\epsilon_k) = \emptyset$ であるようにとる．そのとき，コーシーの積分定理から

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N}\frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-a_j|=\epsilon_j} f(z)\,dz = \sum_{j=1}^{N}\mathrm{Res}(f;a_j)$$

□

15.4 本質的特異点

定義 15.4. $f(z)$ は $0 < |z-a| < r$ で正則とする．$z = a$ が $f(z)$ の**本質的特異点 (Essential singularity)** とは，$f(z)$ の $z = a$ でのローラン展開の負冪の和が無限和のとき，

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n\,, \quad n \in \mathbb{Z}$$

としたとき，任意の $-N < 0$ に対して，$c_{-n} \neq 0$ となる $-n < -N$ が存在する．即ち，$c_n = \neq 0$ となる $n < 0$ が無限個存在する．

例題 15.1.

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \cdots +$$

は $z = a$ を本質的特異点にもつ．

$$\mathrm{ord}_a(f) = -\infty \Longleftrightarrow f(z) \text{ は } x = a \text{ を本質的特異点にもつ}$$

定理 15.4 (The Casorani-Weierstrass Theorem). $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$, $D^* := \{z \in \mathbb{C} \ : \ 0 < |z-a| < r\}$ とし，$f(z)$ を D^* で正則かつ $z = a$ を本質的特異としてもつとする．そのとき，$f(D^*)$ は $\mathbb{C}$ で稠密である．

Proof. 背理法で示す．即ち $\overline{f(D^*)} \neq \mathbb{C}$ とすると，${}^\exists c \in \mathbb{C}$ があって，$c \notin \overline{f(D^*)}$. よって，${}^\exists \delta > 0$ があって，

$$f(D^*) \cap \{w \in \mathbb{C} \ : \ |w - c| < \delta\} = \emptyset.$$

よって，$g(z) = \dfrac{1}{f(z) - c}$ は D^* で正則かつ $|g(z)| \leqq \dfrac{1}{\delta}$. リーマンの除去可能定理から $D = \{|z-a| < r\}$ で正則な関数 $G(z)$ が存在し

$$G\big|_{0<|z-a|<r} = g(z).$$

特に，$0 < |z-a| < r$ 上で

$$G(z) \cdot (f(z) - c) = 1$$

より，$G(z) \not\equiv 0$ である．よって

$$f(z) = c + \frac{1}{G(z)}$$

は $|z-a| < r$ 上の有理型関数である．これは，$f(z)$ が $z = a$ で本質的特異点を持つという仮定に反する．よって証明された． □

注意 15.2. 今，$G(a)=0$ で $z=a$ での位数が m なら

$$f(z)=c+\frac{1}{(z-a)^m}\left(d_m+d_{m+1}(z-a)+\cdots\right)$$

より，$z=a$ は $f(z)$ の極である．一方，$G(a)\neq 0$ ならば $z=a$ は $f(z)$ の除去可能な特異点である．

15.5　正則関数の特異点の分類

最終的に，正則関数の特異点については以下の事が分かった．$f(z)$ を $0<|z-a|<r$ で正則な関数で $z=a$ は $f(z)$ の特異点とする．そのとき，特異点は以下の 3 パターンに分類される．

(Ⅰ) $\lim_{z\to a} f(z)<\infty$（有限確定値）$\iff x=a$ は $f(z)$ の除去可能特異点.

(Ⅱ) $\lim_{z\to a} f(z)=\infty$（無限確定値）$\iff x=a$ は $f(z)$ の極.

(III) $\lim_{z\to a} f(z)$　（不確定値）$\iff x=a$ は $f(z)$ の本質的特異点.

16　留数定理

16.1　偏角の原理

定理 16.1. D を有限個の区分的に滑らかな単純閉曲線 C で囲まれた領域とし，$f(z)$ は $\overline{D}=D\cup C$ での有理型関数で，C 上には極も零点も持たないとする．$f(z)$ の D での零点の位数の総和を N, 極の位数の総和を P とする．このとき

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=N-P$$

Proof. $\alpha\in D$ を $f(z)$ の零点とし，その位数を n とする．そのとき，α の近傍 $\overline{\Delta}(\alpha;\delta)\subset D$ および $\overline{\Delta}(\alpha;\delta)\subset D$ で正則な関数 $g(z)$ が存在し，

$$f(z)=(z-\alpha)^n g(z)$$

と表される．但し，$g(z)=a_n+a_{n+1}(z-\alpha)+\cdots$ は $g(\alpha)=a_n\neq 0$ ゆえ，$\delta>0$ を十分小さく取って $\overline{\Delta}(\alpha;\delta)\subset D$ で $g(z)\neq 0$ とできる．

$$f'(z)=n(z-\alpha)^{n-1}g(z)+(z-\alpha)^n g'(z)$$

は $\Delta(\alpha;\delta)\subset D$ で正則であり，$g'(z)$ も $\overline{\Delta}(\alpha;\delta)\subset D$ で正則である．

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{n}{z-\alpha}+\frac{g'(z)}{g(z)}.$$

このとき，$\overline{\Delta}(\alpha;\delta)\subset D$ で $h(z)=\dfrac{g'(z)}{g(z)}$ は正則関数である．故に，

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=\rho}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ = \ & \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=\rho}\frac{n}{z-\alpha}\,dz+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\alpha|=\rho}h(z)\,dz=n. \end{aligned}$$

一方，$\beta\in D$ を $f(z)$ の極で，その位数を m とする．そのとき，同様に，β の近傍 $\overline{\Delta}(\beta;r)\subset D$ および $\overline{\Delta}(\beta;r)\subset D$ で正則な関数 $k(z)$ が存在し，

$$f(z)=\frac{k(z)}{(z-\beta)^m}$$

と表される．但し，$k(z)=b_m+a_{m+1}(z-\beta)+\cdots$ は $k(\beta)=b_m\neq 0$ ゆえ，$r>0$ を十分小さく取って $\overline{\Delta}(\beta;r)\subset D$ で $k(z)\neq 0$ とできる．

$$f'(z)=\frac{k'(z)}{(z-\beta)^m}-m\frac{k(z)}{(z-\beta)^{m+1}}$$

よって，

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{k'(z)}{k(z)}-\frac{m}{z-\beta}$$

ゆえ，

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\beta|=r}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-\beta|=r}\frac{m}{z-\beta}\,dz=-m$$

そこで，$\{(\alpha_i,n_i)\}_{i=1}^s$ および $\{(\beta_j,m_j)\}_{j=1}^t$ を $f(z)$ の D 内での零点とその位数，および，極とその位数の全てとすし，$\Delta(\alpha_i;\delta_i)$ $(1\leqq i\leqq s)$ および $\Delta(\beta_j;r_j)$ $(1\leqq j\leqq t)$ を D に含まれる零点と極の近傍とする．その周を C_i および Γ_j とすると，

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \sum_{i=1}^s\frac{1}{2\pi i}\int_{C_i}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &+ \sum_{j=1}^t\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_j}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \\ &= \sum_{i=1}^s n_i-\sum_{j=1}^t m_j \\ &= N-P \end{aligned}$$

□

定理 16.2. $f(z)$ を領域を区分的に滑らかな単純閉曲線 C で囲まれた領域 D で有理型関数とする．$\{a_1, \ldots, a_n\}$ を $f(z)$ の D 内の重複も許した零点集合とし，$\{b_1, \ldots, b_m\}$ を $f(z)$ の D 内の重複も許した極の集合とし，$f(z)$ は境界 C 上では連続で，極も零点も持たないとする．このとき，$\overline{D}$ で正則な関数 $\varphi(z)$ に対して

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{m} \varphi(b_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta$$

を得る．正確には,

$$\{(a_1, n_1), \ldots, (a_p, n_p)\}, \{(b_1, m_1), \ldots, (b_q, m_q)\}$$

をそれぞれ相異なる（零点，位数）および（極，位数）とすれば

$$\sum_{i=1}^{p} n_i \varphi(a_i) - \sum_{j=1}^{q} m_j \varphi(b_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(\zeta) \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \, d\zeta$$

定理 16.3. C を自分自身と交わってもかまわない区分的に滑らかな閉曲線とし，C は原点を通らないとする．

$$n(C) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{z} \, dz$$

とおく．このとき，$n(C)$ は閉曲線 C の原点の周りの回転数を表す．

Proof. C 上に有限個の点 $z_0, z_1, \cdots, z_N$ を C の滑らかな部分にとる．局所的には $\log z$ は $\dfrac{1}{z}$ の原始関数であるから

$$\begin{aligned}
n(C) &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{N} \int_{z_{i-1}}^{z_i} d \log z = \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{N} \Big[\log z \Big]_{z_{i-1}}^{z_i} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \sum_{i=1}^{N} \Big[\log |z| + i \arg z \Big]_{z_{i-1}}^{z_i} \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^{N} (\arg z_i - \arg z_{i-1}) \\
&= \frac{1}{2\pi} \Big(\arg z_N - \arg z_0 \Big)
\end{aligned}$$

これは，z_0 から出発して曲線 C 上を回って再び $z_0 = z_N$ に戻ったとき，原点の周りを C が何回廻ったかを示す． □

注意 16.1. **(偏角の原理)** 定理 5 において，$\widetilde{C}=f(C)$ とおく．$w=f(z)$ と変数変換すれば

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{\widetilde{C}}\frac{1}{w}\,dw=n(\widetilde{C})=N-P$$

但し，N,P は C で囲まれる領域内部に於ける $f(z)$ の零点および極の個数（重複許す）を表す.

16.2　ルーシエの定理

定理 16.4. **(ルーシエの定理)** D を有限個の区分的に滑らかな閉曲線 C で囲まれた領域とする．$f(z)$, $g(z)$ を $\overline{D}$ での正則関数であって，

$$|f(z)|>|g(z)|\ \ z\in C$$

と仮定する．このとき，D 内の $f(z)$ と $f(z)+g(z)$ との零点の個数は等しい.

Proof. $0\leqq t\leqq 1$ に対し，$h(z,t)=f(z)+tg(z)\ \ z\in\overline{D}$ とおく．$h(z,t)\neq 0,\ z\in C$ より，D 内の零点の個数 $N(t)$ とおくと，偏角の原理から

$$N(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f'(z)+tg'(z)}{f(z)+tg(z)}\,dz$$

は整数である．以下の補題より $N(t)$ は $t\in[0,1]$ の連続関数なので，$[0,1]$ で定数である．よって，$N(1)=N(0)$．故に，f と $f+g$ の零点の個数は等しい. □

補題 16.1. $N(t)$ $(0\leqq t\leqq 1)$ は連続関数である.

Proof. $m(t)=\inf\limits_{z\in C}|h(z,t)|$ とおく．C はコンパクトより，$^\exists z_t\in C$ が存在して，

$$m(t)=|f(z_t)+tg(z_t)|$$

を満たす.

(1) $m(t)$ は $[0,1]$ 上，$m(t)>0$ となる連続関数である.

実際，任意の $z\in C$ に対して，$|f(z)>|g(z)|$ だから，

$$\begin{aligned} m(t)=|f(z_t)+tg(z_t)| &\geqq |f(z_t)|-t|g(z_t)| \\ &\geqq |f(z_t)|-|g(z_t)|>0 \end{aligned}$$

次に，$m(t)$ の連続性を示そう.

任意の $t_1, t_2 \in [0,1]$ に対して，${}^{\exists}z_{t_1}$, ${}^{\exists}z_{z_2}$ が存在して，

$$m(t_1) = |f(z_{t_1}) + t_1|g(z_{t_1})|,\ m(t_2) = |f(z_{t_2}) + t_1|g(z_{t_2})|$$

今，

$$\begin{aligned}
m(t_2) &= \inf_{z \in C} |f(z) + t_2 g(z)| \\
&\leqq |f(z_{t_1}) + t_2 g(z_{t_1})| \\
&= |f(z_{t_1}) + t_2 g(z_{t_1}) - t_1 g(z_{t_1}) + t_1 g(z_{t_1})| \\
&\leqq |f(z_{t_1}) + t_1 g(z_{t_1})| + |t_2 - t_1| g(z_{t_1}) \\
&\leqq m(t_1) + |t_2 - t_1| \max_C |g(z)|
\end{aligned}$$

が成立する．t_1 と t_2 を入れ替えて，

$$m(t_1) \leqq m(t_2) + |t_2 - t_1| \max_C |g(z)|$$

をうるよって，

$$|m(t_2) - m(t_1)| \leqq |t_2 - t_1| \max_C |g(z)|$$

を得る．これは，$m(t)$ の連続性を示す．従って，$m(t) > 0$ を考慮すれば,

$$m = \inf_{0 \leqq t \leqq 1} m(t) > 0$$

を得る.

(2) $N(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ の連続性.

$|\,(f(z) + t_2 g(z))\,(f(z) + t_1 g(z))\,| \geqq m(t_1)m(t_2) \geqq m^2$ ゆえ,

$$\begin{aligned}
&|N(t_2) - N(t_1)| \\
\leqq\ & \frac{1}{2\pi} \int_C \left| \frac{(t_2 - t_1)\,(g(z)f'(z) - g'(z)f(z))}{(f(z) + t_2 g(z))\,(f(z) + t_1 g(z))} \right| |d\,z| \\
\leqq\ & \frac{L(C)}{m^2} |t_2 - t_1| \sup_C |\,\big(g(z)f'(z) - g'(z)f(z)\big)\,| \\
=\ & \frac{G \cdot L(C)}{m^2} |t_2 - t_1|
\end{aligned}$$

但し，$L(C)$ は C の長さ,

$$G := \sup_C |\,\big(g(z)f'(z) - g'(z)f(z)\big)\,|$$

とおく．これは $N(t)$ の連続性を示す.

□

17 リーマンの写像定理

17.1 関数列に関する復習

定理 17.1 (Cauchy の収束判定条件)**.** 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy** 列をなすことである．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 $N(\epsilon)$ が存在して，$n > m > N(\epsilon)$ なる全ての m, n に対し，

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

が成立する事（**実数の連続性公理**と同値）.

系 17.1. 複素数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が収束するための必要十分条件は $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ が **Cauchy** 列をなすことである．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 $N(\epsilon)$ が存在して，$n > m > N(\epsilon)$ なる全ての m, n に対し，

$$|z_n - z_m| < \epsilon$$

が成立する事.

Proof. $z_n = a_n + i\, b_n \ \ a_n, b_n \in \mathbb{R}$ とおき，実数列に関するコーシーの収束判定条件に帰着させる．その際，以下の不等式を用いる：

$$\{|a_n - a_m|, |b_n - b_m|\} \leqq |z_n - z_m| \leqq |a_n - a_m| + |b_n - b_m|$$

□

定義 17.1. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の複素関数列 $\{f_n(z)\}$ が D で広義一様収束するとは，任意のコンパクト集合 $K \subset D$ 上，$\{f_n(z)\}$ が一様収束すること．即ち，任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある番号 $N(\epsilon, K) > 0$ が存在して，$m, n > N(\epsilon, K)$ なる全ての m, n に対し，任意の $z \in K$ に対し，

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \epsilon \ \cdots (*)$$

が成立する事である．今，

$$\|f\|_K = \sup_{z \in K} |f(z)|$$

を関数 $f(z)$ の K 上の **sup-norm** という．このとき，条件 $(*)$ は

$$\|f_n - f_m\|_K < \epsilon$$

をしてもよい.

注意 17.1. $z \in D$ を固定すれば $\{f_n(z)\}$ は複素数列である．従って，$\{f_n(z)\}$ がCauchy列をなせば系2から収束し, 極限値が z に対して唯一つ存在する．それを $f(z)$ と表す．$f(z)$ は $z \in D$ に応じて唯一つ定まるので，D 上の関数 $f : D \to \mathbb{C}$ を定める．こうして，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z) \quad \text{for} \quad {}^\forall z \in D$$

これを，D 上の関数列 $\{f_n\}$ が D 上の関数 f に**各点収束**するという．$\epsilon - \delta$ 式に表現すれば, 各点 $z \in D$ をとれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, 番号 $N(\epsilon, z)$ が存在して，$n > N(\epsilon, z)$ なる全ての n に対し，

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon$$

が成立するときをいう．

次に，K 上の関数列 $\{f_n\}$ が K 上の関数 f に**一様収束**するとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\epsilon > 0$ と K のみに関係する番号 $N(\epsilon, K)$ が存在して，$n > N(\epsilon, K)$ なる全ての n に対し，

$$|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \ \cdots \ (*)$$

が任意の $z \in K$ に対して成立するときをいう．今 $z \in K$ に対して，

$$|f_n(z) - f(z)| \leqq \|f_n - f\|_K$$

なので，$(*)$ は

$$\|f_n - f\|_K < \epsilon$$

で置き換えてもよい.

関数列の収束と関数値の収束の区別せよ！

領域 $D \subset \mathbb{C}$ での関数の集まり（関数族）を $\mathcal{F}_D$ とおく.

定義 17.2. 関数族 $\mathcal{F} := \mathcal{F}_D$ が $\alpha \in D$ で**同程度連続**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して,，$\epsilon > 0$ と α のみ依存する正数 $\delta := \delta(\epsilon, \alpha) > 0$ が存在し，$|z - \alpha| < \delta$ を満たす $z \in D$ に対して

$$|f(z) - f(\alpha)| < \epsilon \quad \text{for} \quad {}^\forall f \in \mathcal{F}$$

要は, $\delta > 0$ が $\mathcal{F}$ の個々の関数に依らないという事である．$\mathcal{F}$ が D の各点で同程度連続であるとき，D で同程度連続であるという．

定義 17.3. 関数族 $\mathcal{F} := \mathcal{F}_D$ が $\alpha \in D$ で**広義一様有界**であるとは，正数 $M_\alpha > 0$ が存在し，

$$|f(\alpha)| < M_\alpha \quad \text{for} \quad {}^\forall f \in \mathcal{F}$$

を満たす時をいう．ここで, M_α は $\mathcal{F}$ の個々の関数 $f \in F$ に依らないで $\alpha \in D$ のみに依存して取れることが本質的である．関数族 $\mathcal{F}$ が D の各点で広義一様有界のとき, $\mathcal{F}$ は D で広義一様有界という．また, 関数族 $\mathcal{F}$ が D で（狭義）一様有界とは, ある正数 $M > 0$ が存在して, $\mathcal{F}$ に属する全ての関数 $f(z) \in F$ に対して，および全ての $z \in D$ に対して

$$|f(z)| < M$$

が成立する時をいう．

注意 17.2. 関数の一様有界と関数族の一様有界は違うことを注意する．D 上の関数 $f(z)$ が D で一様有界とは，ある正数 $M > 0$ が存在して $|f(z)| < M$ が全ての $z \in D$ で成立することであった．よって，一様有界な関数の族 $\mathcal{F}$ の元は一様有界な関数となる．逆は一般には言えない．この事を各自確かめよ．

17.2 正規族

定義 17.4. 関数族 $\mathcal{F}_D$ が D で**正規族**とは, $\mathcal{F}_D$ の任意の関数列 $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で広義一様収束（コンパクト収束ともいう）する部分列 $\{f_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty \subset \{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ を持つときをいう．

補題 17.1. 正規族 $\mathcal{F}_D$ に属する関数列 $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で各点収束すれば広義一様収束する．

Proof. 背理法による．$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で広義一様収束しないとする．そのとき，あるコンパクト集合 $K \subset D$ が存在して $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は K で一様収束しない．仮定より，各点 $z \in D$ に対して，D 上の関数（極限関数）$f(z)$ が存在し

$$\lim_{\nu\to\infty} f_\nu(z) = f(z)$$

を得る．$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ か K 上一様収束しないので，ある正数 $\epsilon > 0$ および，部分列 $\{f_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty$ および点列 $\{z_j\}_{j=1}^\infty$ が存在して，

$$|f_{\nu,j}(z_j) - f(z_j)| \geqq \epsilon$$

が成立する．これは，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が K 上一様収束する部分列を含まない事を示しており，$\mathcal{F}_D$ が正規族に反する． □

補題 17.2. 正規族 $\mathcal{F}_D$ に属する関数列 $\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が内点 $\alpha \in D$ に収束する点列 $\{z_n\}_{n=1}^\infty$ $(z_n \neq \alpha)$ において収束するなら，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ は D で広義一様収束する．

Proof. 補題 9 より，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で各点収束する事を云えばよい．背理法で示す．$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が D で各点収束しないならば，ある点 $z_0 \in D$ が存在して，$\{f_\nu(z_0)\}_{\nu=1}^\infty$ は収束しない．もし，部分列 $\{f_{\nu,j}\}_{j=1^\infty}$ が存在して．

$$\lim_{j\to\infty} f_{\nu,j}(z_0) = \infty$$

ならば，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ の部分列 $\{f_{\nu,j}\}_{j=1}^\infty$ は D で広義一様収束しない．これは，$\{f_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ が正規族 $\mathcal{F}_D$ に属する事に反する．従って，$\{f_\nu(z_0)\}_{\nu=1}^\infty$ の値は有限不確定である．故に，部分列 $\{f_{\nu,j_k}\}_{\mathrm{j}=1}^\infty, \{f_{\nu,j'_k}\}_{k=1}^\infty$ が存在し，

$$\lim_{k\to\infty} f_{\nu,j_k}(z_0) = \gamma \neq \gamma' = \lim_{k\to\infty} f_{\nu,j'_k}(z_0)$$

二つの関数列 $\{f_{\nu,j_k}\}_{\mathrm{j}=1}^\infty, \{f_{\nu,j'_k}\}_{k=1}^\infty$ は正規族 $\mathcal{F}$ に属するので，これらは，D で広義一様収束する部分列を持つ．それぞれの広義一様収束極限を $\varphi(z), \phi(z)$ とおくと，これらは D 上の正則関数を定める．仮定より，D 内で収束する点列 z_n に対し，

$$\lim_{k\to\infty} f_{\nu,j_k}(z_n) = \lim_{k\to\infty} f_{\nu,j'_k}(z_n)$$

ゆえ，$\varphi(z_n) = \phi(z_n)$ が全ての n について成立する．D が領域（連結開集合）なので，一致の定理から $\varphi(z) = \phi(z)$ が D の各点で成立する． よって，$\varphi(z_0) = \phi(z_0)$ である．一方，$\varphi(z_0) = \gamma \neq \gamma' = \phi(z_0)$ なので矛盾である． □

17.3　アスコリ・アルツェラの定理

補題 17.3 (Montel)**.** 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数全体の集合を $\mathcal{O}(D)$ とおく．$\mathcal{O}(D)$ の部分族

$$\mathcal{F}_D(M) = \{f \in \mathcal{O}(D) \,|\, {}^\exists M > 0 \; s.t. \; |f(z)| < M \text{ for } {}^\forall z \in D\}$$

は D 上同程度連続である．

Proof. ${}^\forall f \in \mathcal{F} := \mathcal{F}_D(M)$，および任意の点 ${}^\forall \alpha \in D$ をとる．$D = \{z \in \mathbb{C} \;\; |z-\alpha| < r\} \subset D$ であるように $r > 0$ を選ぶ．$\overline{D}$ の境界を C_r とする．$z \in D$ に対し，

$$\begin{aligned} f(z) - f(\alpha) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\zeta)\left\{\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - \alpha}\right\} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} f(\zeta)\frac{z-a}{(\zeta - z)(\zeta-\alpha)}\, d\zeta \end{aligned}$$

$\min_{\zeta \in C_r} |\zeta - z| = r - |z - \alpha| > 0$ を用いて，

$$|f(z) - f(\alpha)| \leqq \frac{M \cdot |z - \alpha|}{r - |z - a|}$$

任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\delta := \min(r\,2^{-1}, \epsilon\, r\, M^{-1} 4^{=1})$$

とおく．そのとき，全ての $f \in \mathcal{F}$ に対して，$|z - \alpha| < \delta$ ならば，

$$|f(z) - f(\alpha)| \leqq \frac{M \cdot |z - \alpha|}{r - |z - a|} < \frac{M \cdot \delta}{r - \delta} \leqq \frac{M \cdot \epsilon \cdot r\, M^{-1} 4^{-1}}{r - r\,2^{-1}} < \frac{\epsilon}{2}.$$

ここで，$\delta > 0$ は関数 $f \in \mathcal{F}$ には依存しない．よって，$\mathcal{F}$ は D で同程度連続である． □

補題 17.4 (Ascoli-Arzelá)**.** 領域 D で関数族 $\mathcal{F}$ が同程度連続であってかつ D の各点 $z \in D$ において全ての関数 $f \in \mathcal{F}$ に対して $|f(z)| < M_z$ となる正数 $M_z > 0$ が存在すれば，$\mathcal{F}$ は D で正規族である．

Proof. 証明は各自適当なテキストを見て確認しておく事． □

以上より

定理 17.2 (Montel の定理)**.** 領域 $D \subset \mathbb{C}$ 上の正則関数全体の集合を $\mathcal{O}(D)$ とおく．$\mathcal{O}(D)$ の部分族

$$\mathcal{F}_D(M) = \{f \in \mathcal{O}(D) \mid {}^{\exists}M > 0\ s.t.\ |f(z)| < M \text{ for } {}^{\forall}z \in D\}$$

は D 上正規族である．

アスコリ・アルツェラの定理を用いないでモンテルの定理を証明しよう．

定理 17.3 (スティルティスの定理)**.** 領域 D 上の一様有界な正則関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$、即ち，ある正数 $M > 0$ が存在して，

$$|f_n(z)| \leqq M, \quad z \in D, \quad n = 1, 2, \cdots$$

とする．このとき, D で広義一様収束する $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列 $\{f_{n_k}(z)\}_{k=1}^{\infty}$ が存在する．

17.4　スティルティスの定理の証明

D は開集合だから，任意の点 $\alpha \in D$ をとれば，正数 $R > 0$ が存在して，$\Delta_R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - \alpha| \leqq R\} \subset D$ とできる．いま，$0 < r < R$ なる任意の $r > 0$ に対して，$\Delta := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - \alpha| < r\}$ とおく．

(Claim 1) 関数列 $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ は Δ_r で一様収束する部分列 $\{g_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ をもつ．

実際，簡単のため $\alpha = 0$ としよう．各 $n = 1, 2, \cdots$ に対して，$f_n(z)$ は Δ で正則ゆえ，$z = 0$ の周りのテーラー展開

$$f_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(n)} z^k$$

は Δ で一様収束する．各 n に対して $|f_n(z)| < M$ ゆえ，コーシーの評価式より，

$$\left|c_k^{(n)}\right| < \frac{M}{R^{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \cdots, \ n = 1, 2, \cdots$$

$(i) : k = 0$ のとき，$|c_0^{(n)}| < M$ が $n = 1, 2, \cdots$ に対して成り立つので，有界な複素数列である．従って，収束する部分列

$$\{c_0^{(n_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_0^{(n)}\}_n^{\infty}$$

が存在する．この数列の極限値を A_0 とする．$\{c_0^{(n_j)}\}_{j=1}^{\infty}$ に対応する関数列:

$$\begin{aligned}
f_{n_0}(z) &= c_0^{(n_0)} + c_1^{(n_0)} z + c_2^{(n_0)} z^2 + \cdots \\
f_{n_1}(z) &= c_0^{(n_1)} + c_1^{(n_1)} z + c_2^{(n_1)} z^2 + \cdots \\
&\cdots \\
f_{n_j}(z) &= c_0^{(n_j)} + c_1^{(n_j)} z + c_2^{(n_j)} z^2 + \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}$$

を考える．そのとき，

$$\{f_{n_j}(z)\}_{j=1}^{\infty} \subset \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$$

である．

$(ii) : k = 1$ のとき，$\{c_1^{(n_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_1^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ かつ

$$|c_1^{(n)}| < \frac{M}{R}, \ n = 1, 2, \cdots$$

ゆえ，

$$|c_1^{(n_j)}| < \frac{M}{R}, \ j = 0, 1, \cdots$$

よって，収束する部分列 $\{c_1^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_1^{(n_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ をもつ．この部分列の極限値を A_1 とおく．$\{c_1^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ に対応する関数列

$$
\begin{aligned}
f_{n'_0}(z) &= c_0^{(n'_0)} + c_1^{(n'_0)}z + c_2^{(n'_0)}z^2 + c_3^{(n'_0)}z^3 + \cdots \\
f_{n'_1}(z) &= c_0^{(n'_1)} + c_1^{(n'_1)}z + c_2^{(n'_1)}z^2 + c_3^{(n'_0)}z^3 \cdots \\
&\cdots \\
f_{n'_j}(z) &= c_0^{(n'_j)} + c_1^{(n'_j)}z + c_2^{(n'_j)}z^2 + \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

を考える．ここで，

$$\{c_0^{(n'_j)}\} \subset \{c_0^{(n_j)}\},\ \{c_1^{(n'_j)}\} \subset \{c_1^{(n_j)}\}$$

である．

我々は関数列 $\{f_{n_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$ の z の係数列 $\{c_1^{(n_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ に着目し，その部分列に対応する関数列を選んでいる事から，

$$\{f_{n'_j}(z)\}_{j=0}^{\infty} \subset \{f_{n_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$$

である．

$(iii) : k = 2$ のとき，全ての n について，

$$|c_2^{(n)}| < \frac{M}{R^2}$$

だから，$\{c_2^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ に対しても

$$|c_2^{(n'_j)}| < \frac{M}{R^2},\ j = 0, 1, \cdots$$

が成立する．こうして，収束する部分列

$$\{c_1^{(n''_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_1^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty},\ \{c_2^{(n''_j)}\}_{j=0}^{\infty} \subset \{c_2^{(n'_j)}\}_{j=0}^{\infty}$$

が存在する．この部分列の極限値を A_2 とする．そこで，

$\{c_2^{(n''_j)}\}_{j=0}^{\infty}$ に対応する次の関数列を考える．

$$
\begin{aligned}
f_{n''_0}(z) &= c_0^{(n''_0)} + c_1^{(n''_0)}z + c_2^{(n''_0)}z^2 + c_3^{(n'_0)}z^3 \cdots \\
f_{n''_1}(z) &= c_0^{(n''_1)} + c_1^{(n''_1)}z + c_2^{(n''_1)}z^2 + c_3^{(n''_1)}z^3 \cdots \\
&\cdots \\
f_{n''_j}(z) &= c_0^{(n''_j)} + c_1^{(n''_j)}z + c_2^{(n''_j)}z^2 + c_3^{(n''_j)}z^3 \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}
$$

関数列 $\{f_{n''_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$ の選び方から，関数列の部分列の包含関係：

$$\{f_{n''_j}(z)\}_{j=0}^{\infty} \subset \{f_{n'_j}(z)\}_{j=0}^{\infty} \subset \{f_{n_j}(z)\}_{j=0}^{\infty} \subset \{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$$

を得る．同様に，部分列 $\{f_{n'''_j}(z)\}_{j=0}^{\infty}$ を得る．

$$\begin{aligned}
&\{c_0^{(n'''_j)}\} \subset \{c_0^{(n''_j)}\} \subset \{c_0^{(n'_j)}\} \subset \{c_0^{(n_j)}\} \to A_0 \\
&\{c_1^{(n'''_j)}\} \subset \{c_1^{(n''_j)}\} \subset \{c_1^{(n'_j)}\} \to A_1 \\
&\{c_2^{(n'''_j)}\} \subset \{c_2^{(n''_j)}\} \to A_2
\end{aligned}$$

さて，正則関数列 $g_0(z), g_1(z), g_2(z), \cdots$

$$\begin{aligned}
g_1(z) &= c_0^{(n_1)} + c_1^{(n_1)} z + c_2^{(n_1)} z^2 + \cdots \\
g_2(z) &= c_0^{(n'_0)} + c_1^{(n'_1)} z + c_2^{(n'_2)} z^2 + \cdots \\
g_3(z) &= c_0^{(n''_0)} + c_1^{(n''_1)} z + c_2^{(n''_2)} z^2 + c_3^{(n''_3)} z^3 \cdots \\
g_4(z) &= c_0^{(n'''_0)} + c_1^{(n'''_1)} z + c_2^{(n'''_2)} z^2 + c_3^{(n'''_3)} z^3 \cdots \\
&\cdots
\end{aligned}$$

を考える．そこで，改めて

$$g_m(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(m)} z^k \quad (m \geqq 0)$$

とおく．このとき，$\lim_{m\to\infty} b_k^{(m)} = A_k \ (k \geqq 1)$

Δ_R 上の正則関数列 $\{g_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ は Δ_r 上 $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k$ に一様収束する．ここに，$\{g_m(z)\}_{m=1}^{\infty}$ は $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ の部分列である．

今，$g(z)$ は Δ_R で正則である．実際，収束半径を求めると

$$|b_k^{(m)}| \leqq \frac{M}{R^k} \Longrightarrow |A_k| \leqq \frac{M}{R^k} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

より

$$\frac{1}{\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|A_k|}} = \frac{R}{\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{M}} = R$$

を得る．よって，$g(z)$ は Δ_R で正則である．

さて，$\epsilon > 0$ に対し，$N > 0$ を十分大きくとれば，$0 < \dfrac{r}{R} < 1$ より，$\displaystyle\sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^k < \epsilon$ とできる．この N を固定して

$$L = \sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

とおく．$N' > 0$ を十分大きくとれば，${}^{\forall}m > N'$ に対し，

$$|b_k^{(m)} - A_k| < \epsilon \ \ (k = 0, 1, \ldots, N),$$

とできる．$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対して，

$$|A_k|, |b_k^{(m)}| \leqq \frac{M}{R^k} \ \ (m = 1, 2, \ldots)$$

に注意すれば，任意の $m \geqq N'$ および，任意の $z \in \Delta_r$ に対して，

$$\begin{aligned} |g_m(z) - g(z)| &= \left| \sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(m)} z^k - \sum_{k=0}^{\infty} A_k z^k \right| \\ &= \sum_{k=0}^{N} |b_k^{(m)} - A_k||z|^k \\ &+ \sum_{k=N+1}^{\infty} (|b_k^{(m)} + |A_k|)|z|^k \\ &< (L + 2M)\epsilon \end{aligned}$$

よって，$\{g_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ は Δ_r で $g(z)$ に一様収束する．

領域 D の有理点全体は可算集合より $\{z_i\}_{i=1}^{\infty}$ と番号をつける事ができる．z_i と ∂D の距離を $d_i > 0$ で表し，中心 z_i, 半径 $\dfrac{d_i}{2}$ の閉円板を δ_i とする．このとき，

$$D = \bigcup_{i=0}^{\infty} \delta_i$$

である．まず，**(Claim 1)** より δ_1 で一様収束する部分列 $\{f_{1n}\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．この極限関数を $f^{(1)}(z)$; $(z \in \delta_1)$ とする．次に，$\{f_{1n}\}$ の部分列で δ_2 上一様収束する関数列を $\{f_{2n}\}$ とし，その極限関数を $f^{(2)}(z)\,;(z \in \delta_2)$ とする．このとき，取り方から，$\{f_{2n}(z)\}$ は $\delta_1 \cup \delta_2$ で一様収束する．特に，$f^{(2)}(z) = f^{(1)}(z)\,; z \in \delta_1$. 以下，同様に

$$
\begin{array}{llllll}
f_{11}, & f_{12}, & f_{13}, \cdots & \to f^{(1)}(z), & & z \in \delta_1 \\
f_{21}, & f_{22}, & f_{23}, \cdots & \to f^{(2)}(z), & & z \in \delta_1 \cup \delta_2 \\
f_{31}, & f_{32}, & f_{33}, \cdots & \to f^{(3)}(z), & & z \in \delta_1 \cup \delta_2 \cup \delta_3 \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots \\
\cdots & \cdots & & \cdots & & \cdots
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lllll}
\cdots & f_{kk} & \cdots & \cdots & \to f^{(k)}(z), \quad z \in \bigcup_{\ell=1}^{k} \delta_\ell \\
\cdots & \cdots & f_{k+1\,k+1} & \cdots & \to f^{(k+1)}(z), \quad z \in \bigcup_{\ell=1}^{k+1} \delta_\ell \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

そこで，このダイアグラムの対角線にある関数列

$$
f_{11}(z),\ f_{22}(z),\ f_{33}(z), \ldots
$$

を考える．その構成法より，$k \geqq 1$ を固定した時，対角線に位置する正則関数列 $\{f_{mm}(z)\}_{m=k,k+1,\ldots}$ は $\{f_{k\ell}(z)\}_{\ell=1,2,\ldots}$ の部分列である．従って，$\{f_{mm}(z)\}_{m=1}^{\infty}$ は δ_k 上で $f^{(k)}(z)$ に一様収束する．

$$
\lim_{m\to\infty} f_{mm}(z) = f^{(k)}(z) = \lim_{\ell\to\infty} f_{k\ell}(z) \quad \text{if} \quad z \in \delta_k
$$

$k \geqq 1$ は任意なので，$\{f_{mm}(z)\}_{m=1}^{\infty}$ は D で各点収束する．この収束は，実は，広義一様収束である．実際，任意にコンパクト集合 $K \subset D$ をとれば，

$$
K \subset D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \delta_i
$$

ゆえ，K のコンパクト性から，有限個の $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_N}$（$N$ 個とする）が存在して，$K \subset \bigcup_{j=1}^{N} \delta_{i_j}$ とできる．このとき，$\{f_{mm}(z)\}_{m=1}^{\infty}$ は各 δ_{i_j} 上で一様収束するから，K 上でも一様収束する．

17.5 単連結領域

定義 17.5. 複素平面内の領域 $D \subset \mathbb{C}$ について，

(1) D が**関数論的単連結** (holomorphically simply connected) であるとは，任意の閉曲線 $\gamma \subset D$ および D 上の任意の正則関数 $f(z)$ に対して，

$$
\int_\gamma f(z)\, d\,z = 0
$$

が成立する時をいう．

(2) D が**単連結** (simply connected) であるとは，基本群 $\pi_1(D, z_0) = \{1\}$ $(z_0 \in D)$(自明）の時をいう．

問題 17.1. 定義 *17.5* の（１）と（２）は同値である事を証明せよ．

以後は，定義 17.5 の（１）と（２）は同値である事を前提に話を進める．

17.6 正則対数関数

補題 17.5. 領域 $D \subset \mathbb{C}$ を複素平面内の単連結領域とし，$f(z)$ を D で零を取らない (non-vanishing) 正則関数とする．そのとき，

$$e^{\mathrm{g}\,(z)} = f(z) \quad (z \in D)$$

を満たす D 上の正則関数 $g(z)$ が存在する．このような $g(z)$ は定数 $2\pi in$ $(n \in \mathbb{Z})$ の違いを除き一意的に定まる．そのうちの一つを $g(z) = \log f(z)$ と表し，$f(z)$ の対数関数の（一価分岐）という．

Proof. $z_0 \in D$ を任意に固定する．D 内の任意の点 $z \in D$ に対して, $\gamma \subset D$ を z_0 と z を結ぶ曲線とする．このような曲線は D が連結より存在する．$f(z) \neq 0$ $(z \in D)$ より，

$$\varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$$

は D で正則な関数である．

$$F(z) = \int_\gamma \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z} \varphi(\zeta)\, d\zeta$$

$F(z)$ は z_0 と z を結ぶ D 内の曲線 $\gamma \subset D$ の取り方に依らないで，z にのみに依存する．実際，$\gamma' \subset D$ を z_0 と z を結ぶ D 内の他の曲線とすると，$\gamma \cdot \gamma'^{-1}$ が D 内の閉曲線である．よって，D の単連結性から，

$$0 = \int_{\gamma\cdot\gamma'^{-1}} \varphi(\zeta)\, d\zeta = \int_\gamma \varphi(\zeta)\, d\zeta - \int_{\gamma'} \varphi(\zeta)\, d\zeta$$

h を十分小さく取れば $z + h$ と z を結ぶ線分 K_h が D に含まれるようにできる．K_h の長さは $\ell(K_h) = |h| > 0$ である．このとき，

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - \varphi(z) \right| &\leqq \frac{1}{|h|} \cdot \int_K |\varphi(\zeta) - \varphi(z)|\ |d\zeta| \\
&\leqq \frac{1}{|h|} \ell(K_h) \max_{K_h} |\varphi(\zeta) - f(z)| \\
&= \max_{K_h} |\varphi(\zeta) - \varphi(z)| \xrightarrow{h\to 0} 0
\end{aligned}$$

を得る．よって，

$$F'(z) = \varphi(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} \quad (z \in D)$$

が成立する．特に，$F(z)$ は正則関数である．今，

$$\frac{d}{dz}\left(e^{-F(z)}f(z)\right) = e^{-F(z)}\left\{-F'(z)f(z) - f'(z)\right\} = 0$$

なので，関数 $e^{-F(z)}f(z) \equiv c(\neq 0)$（定数関数）である．よって，

$$f(z) = ce^{F(z)} \ (c \neq 0)$$

$c \neq 0$ より，$c = e^b$ となる $b \in \mathbb{C}$ が存在する．よって， $g(z) = F(z) + b$ とおくと，

$$f(z) = e^{F(z)+b} := e^{g(z)}$$

を得る．他に，$f(z) = e^{g_0(z)}$ なる正則関数 $g_0(z)$ をとる．このとき，

$$e^{g(z)-g_0(z)} = 1$$

従って，$(g(z) - g_0(z))' = 0$ より，$g(z) - g_0(z) = \theta$ は定数関数．よって，

$$e^{\theta} = 1 \Longleftrightarrow \theta = 2\pi in \ (n \in \mathbb{Z})$$

よって，

$$g_0(z) = g(z) + 2\pi in$$

即ち, $e^{g(z)} = f(z)$ なる $g(z)$ は定数 $2\pi in$ の分を除けば一意的に定まる． □

系 17.2. D を単連結領域とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{C}^*$ を正則関数，即ち，$f(z)$ は D 上の決して零を取らない正則関数とする．このとき，任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対して，D 上の正則関数 $h(z)$ で，$\{h(z)\}^n = f(z)$ を満たすものが存在する．1 の原始 n 乗根を ρ とすれば，$\rho^k h(z)$ $(1 \leqq n-1)$ の選択の自由度がある．そのうちの一つを $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ と表し,$f(z)$ の n 乗根関数の一価分岐という．

Proof. まず，$f(z) \neq 0$ より，補題１７．５によれば，$e^{g(z)} = f(z)$ を満たす D 上の正則関数 $g(z)$ が存在する．そこで，

$$h(z) := e^{\frac{g(z)}{n}}$$

とおくと，$h(z)$ は $h(z) \neq 0$ なる正則関数で

$$\{h(z)\}^n = e^{g(z)} = f(z)$$

を満たす． □

<u>**系**</u> **17.3.** $f(z) \neq 0$ を単連結領域 D 上の単葉関数，即ち，$f : D \longrightarrow \mathbb{C}^*$ は単射な正則関数とする．そのとき，$h(z) = \sqrt{f(z)}$ および $-h(z)$ が $f(z)$ の平方根一価正則関数であるが,

$$h(D) \cap (-h(D)) = \emptyset$$

を満たす.

Proof. $(h(z))^2 = (-h(z))^2 = f(z)$ より，

$$h(z) = \pm h(z') \Longleftrightarrow f(z) = f(z') \Longleftrightarrow z = z'.$$

よって, $\pm h(z)$ は D 上の単葉関数である．$w_0 \in h(D) \cap (-h(D))$ をとれば, $w_0 = h(z_0) = -h(z_1)$ を満たす $z_0, z_1 \in D$ が存在する．よって，$z_0 = z_1$. 故に,

$$h(z_0) = -h(z_0) \Longrightarrow 2h(z_0) = 0.$$

これは，$h(z) \neq 0$ に反する．こうして，結論を得る． $\square$

<u>**命題**</u> **17.1.** $D \subset \mathbb{C}$ を単連結領域で $D \neq \mathbb{C}$ とする．また，D の境界 ∂D は 2 点以上含むとする．そのとき，D を単位円板内に単葉に写像する正則関数（等角写像）が存在する.

Proof. $a \neq b \in \partial D$ をとり，一次分数変換

$$w_1 = T_1(z) = \frac{z-a}{z-b}$$

を考える．$T_1 : D \longrightarrow \mathbb{C}_{w_1}$ は単射正則関数である.

$$D_1 := T_1(D) \subset \mathbb{C}_{w_1}$$

とおく．そのとき，D_1 は単連結で，その境界は $w_=0, \infty$ を含む．特に, $0 \notin D_1 . D_1$ 上の単射正則関数 $f(w_1) = w_1$ は D_1 上で非ゼロゆえ，$w_2 := g(w_1) = \sqrt{w_1}$, $w_2 = -g(w_1) = -\sqrt{w_1}$ はそれぞれ，D_1 上の一価正則関数である．系 17.3 より,

$$g(D_1) \cap (-g(D_1)) = \emptyset$$

である．ここで, $\pm D_2 := \pm g(D_1)$ は単連結境域である (正則関数は開写像). $\widetilde{D}_2 = -D_2$ の内点 c をとれば, ある正数 $\delta > 0$ が存在し, $\{|w_2 - c| \leqq \delta\} \subset \widetilde{D}_2$ とできる．そこで，一次分数変換

$$\zeta = T_2(w_2) = \frac{\delta}{w_2 - c}$$

を考えると.

$$T_2(\{|w_2 - c| \leqq \delta\}) = \{|\zeta| \geqq 1\},$$

$$T_2(\{|w_2 - c| = \delta\}) = \{|\zeta| = 1\}$$

をみたす．$\{|w_2 - c| \leqq \delta\} \cap D_2 = \emptyset$ で，$T_2(w_2)$ は D_2 上単葉正則ゆえ，$\Omega := T_2(D_2) \subset \{|\zeta| < 1\}$ は単連結領域である．合成関数

$$f := T_2 \circ g \circ T_1 : D \xrightarrow{T_1} D_1 \xrightarrow{g} D_2 \xrightarrow{T_2} \Omega \subset \{\zeta \in \mathbb{C} \ : \ |\zeta| < 1\}$$

は求める単射正則写像である．特に，$\Omega = f(D)$ は単連結である．Ω は原点を含むとしてよい．もし，含まないなら，$0 \neq \alpha \in \Omega$ を取って，

$$T_3(\zeta) = \frac{\zeta - \alpha}{1 - \overline{\alpha}\zeta}$$

なる一次分数変換を考えればよい． □

命題 17.2. z-平面の単位円板 $\Delta := \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| < 1\}$ の内部にある単連結領域 Ω が原点を含み，$\Omega \neq \Delta$ と仮定する．そのとき，Ω で単葉かつ正則な関数 $\phi(z)$ で

$$|\phi(z)| < 1 \quad \text{for} \quad {}^{\forall} z \in \Omega,$$

かつ

$$\phi(0) = 0 \ , \ |\phi'(0)| > 1$$

なるものが存在する．

Proof. $\alpha \notin \Omega$ をとる．一次変換

$$\zeta = T_1(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \overline{\alpha} z}$$

により，単位円板 $\{|z| < 1\}$ は単位円板 $\{|\zeta| < 1\}$ へ一対一等角に写像される．この写像による Ω の像を Ω^* とおくと，Ω^* は原点を含まない単連結領域 $\Omega^* \neq \{|\zeta| < 1\}$ である．$T_1(0) = -\alpha \neq 0 \in \Omega^*$. 今，一次関数 ζ は Ω^* 上でゼロを取らないので，Ω^* の一価正則関数 $\eta = g(\zeta)$ で $\{g(\zeta)\}^2 = \zeta$ を満たすものが存在する．今，$\beta := g(-\alpha) \in g(\Omega^*) =: \widetilde{\Omega}^*$ である．特に，Ω^* と $\widetilde{\Omega}^* \subset \{|\eta| < 1\}$ は g において一対一等角に写像される．そこで，

$$w = T_2(\eta) = \frac{\eta - \beta}{1 - \overline{\beta}\eta}$$

を考えて，合成関数

$$\phi(z) = T_2(g(T_1(z)))$$

を作ればこれが求めるものである．実際，

$$\phi(0) = T_2((g(T_1(0))) = T_2(g(-\alpha)) = T_2(\beta) = 0$$

かつ

$$\phi'(0) = T_2'(\beta) \cdot g'(-\alpha) \cdot T_1'(0) = \frac{1-|\alpha|^2}{2\beta(1-|\beta|^2)}.$$

$|\alpha| = |\beta|^2 < 1$ ゆえ，

$$|\phi'(0)| = \frac{1+|\beta|^2}{2|\beta|} > 1$$

を得る． □

定理 17.4 (Riemann の写像定理)**.** 複素平面内の単連結領域 D はその境界 ∂D が少なくとも二つの境界点をもてば，D から単位開円板への 1 対 1 等角写像を与える D での正則関数が存在する．

Proof. 命題 17.1 より，D は z-平面内の単位円板内の原点を含む単連結領域として良い．そこで，D 上の単葉関数の族：

$$\mathcal{F} := \{f(z) \ : \ f(z) \text{ は } D \text{ で単葉正則，} f(0) = 0 \ , \ |f(z)| \leqq 1\}$$

今，$f(z) = z$ は $\mathcal{F}$ に属するので

$$\mathcal{F} \neq \emptyset.$$

また，D は $z = 0$ を含む領域ゆえ，ある正数 $r > 0$ が存在して，

$$\{|z| \leqq r\} \subset D$$

とできる．グッツマーの不等式より，すべての $f(z) \in \mathcal{F}$ に対し，

$$|f'(0) \cdot r| \leqq 1 \Longrightarrow |f'(0)| \leqq \frac{1}{r}$$

が成立する．今，$f(z) \in \mathcal{F}$ なので，

$$\rho := \sup_{f \in \mathcal{F}} |f'(0)|$$

とおけば

$$1 \leqq \rho \leqq \frac{1}{r}.$$

上限の定義から，任意の正の整数 $k > 0$ に対し，

$$\rho - \frac{1}{k} < |f_k'(0)| \leqq \rho.$$

を満たす関数 $f_k \in \mathcal{F}$ がある．$\mathcal{F}$ は正規族ので，$\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ は D で広義一様収束する部分列 $\{f_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ をもつ．その極限関数を

$$\lim_{j\to\infty} f_{k_j}(z) = \varphi(z)$$

とおく．$\varphi(z)$ は D で正則かつ Weierstrass の定理から

$$\lim_{j\to\infty} f'_{k_j}(0) = \varphi'(0).$$

よって，

$$|\varphi'(0)| = \rho.$$

よって，$\varphi(z)$ は定数でない正則関数．一方，$f_{k_j}(z) \longrightarrow \varphi(z)$ は広義一様収束かつ $|f_{k_j}(z)| < 1$ $(j = 1, 2\ldots)$ ゆえ，$|\varphi(z)| \leqq 1$ が成立する．

次に，$\varphi(z)$ が D で単葉である事を示す．実際，$\varphi(z)$ が単葉でないと仮定すると 2 点 $\alpha_1 \neq \alpha_2 \in D$ が存在して，

$$\varphi(\alpha_1) = \varphi(\alpha_2) = \gamma$$

を満たす．正則関数 $\varphi(z) - \gamma$ は $z = \alpha_i$ $(i = 1, 2)$ で零点をもち，定数でない正則関数の零点は孤立点であることから，互いに交わらない D 内の閉円板 $\{|z - \alpha_i| \leqq r_i \ (i = 1, 2)\}$ が存在し，その境界 $\Gamma_i := \{|z - \alpha_i| = r_i\}$ 上，

$$|\varphi(z) - \gamma| \geqq m$$

となる正の数 $m > 0$ を取る事ができる．一方，$\{f_{k_j}(z)\}$ が $\varphi(z)$ に広義一様収束することから，この m に対して，ある番号 j が存在し，

$$|f_{k_j}(z) - \varphi(z)| < m$$

が閉円板 $\{|z - \alpha_i| \leqq r_i \ (i = 1, 2)\}$ で成立する．よって，円周 Γ_i 上で

$$|\varphi(z) - \gamma| > |f_{k_j}(z) - \varphi(z)|$$

が成立する．よって,Rouché の定理より，Γ_1, Γ_2 で囲まれる円板内で

$$\varphi(z) - \gamma$$

の零点の数と

$$f_{k_j}(z) - \varphi(z) + (\varphi(z) - \gamma) = f_{k_j}(z) - \gamma$$

の零点の数は同じである．$\varphi(z) - \gamma$ の Γ_1, Γ_2 で囲まれる円板内での零点の数はそれぞれ 1 以上であるので，$f_{k_j}(z) - \gamma$ のそこでの零点の数もそれ

ぞれ1以上である．こうして，$f_{k_j}(z)-\gamma=0$ はそれぞれの円板内で零点を持つことを意味する．それらを，$\beta_1\neq\beta_2$ とすれば，

$$f_{k_j}(\beta_1)=\gamma=f_{k_j}(\beta_2)$$

となり，$f_{k_j}(z)$ の単葉性に反する．従って，$\varphi(z)$ は D で単葉である．

今，$\varphi(z)$ は $\varphi(0)=0,\ |\varphi(z)|\leqq 1$ なる単葉関数であった．$w=\varphi(z)$ は D から $\{|w|<1\}$ への単射正則写像を与える．実際，$\varphi(z)$ は開写像より，$\varphi(D)$ は $\{|w|\leqq 1\}$ に含まれる $\mathbb{C}$ 内の開集合なので $\{|w|<1\}$ に含まれる．今．$\varphi(D)\neq\{|w|<1\}$ と仮定すれば，命題 17.2 により，$\varphi(D)$ で正則単葉な関数 $\phi(w)$ で，$|\phi(w)|<1$ かつ $\phi(0)=0,|\phi'(0)|>1$ をみたすものが存在する．合成関数，

$$\Phi(z)=\phi(\varphi(z))$$

は単葉で

$$\Phi(0)=\phi(\varphi(0))=\phi(0)=0,\ |\Phi(z)|<1$$

を満たすので，$\mathcal{F}$ に属する関数である，即ち，$\Phi(z)\in\mathcal{F}$. 一方，

$$|\Phi'(0)|=|\phi'(0)|\,|\varphi'(0)|>\rho$$

ゆえ，$\rho=\sup_{f\in\mathcal{F}}|f'(0)|$ に反する．よって，$\varphi(D)=\{|w|<1\}$ を得る．こうして，D と単位円板 $|w|<1$ は等角同型である．最後に，このような等角写像は一意的に存在する事をしめそう．$\varphi_1,\varphi_2:D\longrightarrow\{|w|<1\}$ を，$\varphi_i(0)=0,\ |f_i'(0)|=\rho\geqq 1$ なる等角同型写像とする．

$$h(w)=\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1:\Delta:=\{|w|<1\}\longrightarrow\{|w|<1\}=\Delta$$

は

$$h(0)=0,h'(0)=\frac{\varphi_2'(0)}{\varphi_1'(0)}=1$$

を満たす，単位円板の同型写像 $h\in\mathbb{A}\mathrm{ut}(\Delta)$ である．よって，$h(w)=w$ である．即ち，

$$\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1(w)=w\Longrightarrow\varphi_2\left(\varphi_2^{-1}\circ\varphi_1(w)\right)=\varphi_2(w).$$

よって，

$$\varphi_1(w)=\varphi_2(w)$$

を得る．こうして一意性が証明された．　□

<u>**問題**</u> **17.2.** $\mathbb{A}\mathrm{ut}(\Delta)$ の構造を調べよ．